Ejercicios Parcial I

Santiago Martínez, Román Contreras

30 de agosto de 2017

1. Semana I

1.1. El grupo ortogonal

Ejercicio 1.1. *Recordemos que el conjunto de matrices ortogonales, $O(n)$, está definido por:*

$$O(n) = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid MM^* = Id\}$$

y que $SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$.

1. *Definamos las matrices R_α como*

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   y R_y como

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Demuestra que $R(\alpha), R_y \in O(2)$ y que $R(\alpha) \in SO(2)$ pero $R_y \notin SO(2)$.

2. *Demuestra que $R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$ y $R_0 = Id$.*

3. *Demuestra que $O(2) = \{R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{R_y R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.*

4. *Demuestra que $O(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times \{0,1\}$.*

Ejercicio 1.2. *Demuestra que $O(n)$ es una variedad diferenciable y calcula su dimensión.*

Ejercicio 1.3 (*)**.** *Demuestra que $SO(n)$ es conexo.*

1.2. Construcción de variedades

Los siguientes ejercicios conciernen algunas construcciones comunes y útiles para generar nuevas variedades a partir de variedades dadas.

Ejercicio 1.4. *Sean M y N variedades diferenciables.*

1. *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ dos funciones diferenciables. Demuestra que la función $f \times g : U \times V \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{m+l}$ definida por*

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

   es diferenciable y calcula su diferencial.

2. *Sean (U, φ_U) y (V, φ_V) cartas de M y N, respectivamente. Demuestra que $(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V)$ es una carta.*

3. *Si $\mathscr{A}_M$ y $\mathscr{A}_N$ son los atlas de M y N (de tipo C^r), demuestra que*

$$\mathscr{A} = \{(U \times V, \varphi_U \times \varphi_V) \mid (U, \varphi_U) \in \mathscr{A}_M \text{ y } (V, \varphi_V) \in \mathscr{A}_N\}$$

forma un atlas de tipo C^r de $M \times N$.

4. *Demuestra que con el atlas del inciso anterior $M \times N$ es una variedad diferenciable para el cual las funciones, llamadas las proyecciones canónicas, π_M, π_N definidas por $\pi_M(x, y) = x$ y $\pi(x, y) = y$, son diferenciables.*

Ejercicio 1.5. *Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to M$ un difeomorfismo inyectivo tal que $f^2 = Id$.*

1. *Demuestra que para todo $p \in M$ existen una vecindad U de p tal que $f(U) \cap U = \emptyset$. cartas diferenciables $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$.*

2. *Definimos una relación de equivalencia $x \sim y$ si $x = f(y)$. Las clases de equivalencia, o bien el conjunto obtenido de identificar p con $f(p)$ es llamado*
$$M/f = \{[p]_\sim \mid p \in M\}$$
Demuestra, usando el inciso anterior, que M/f tiene una estructura diferenciable tal que la proyección canónica $\pi_f : M \to M_f$, dada por $\pi_f(p) = [p]$, es diferenciable.

2. Semana II

2.1. Espacios tangentes en rn

Recordemos la definición de espacio tangente en $\mathbb{R}^n$ que manejamos en la clase: Dado $p \in \mathbb{R}^n$ definimos el conjunto

$$T_p\mathbb{R}^n := \{\gamma | \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n, \gamma(0) = p\} / \sim_p$$

donde $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ cuando $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. Definimos además las operaciones siguientes: $[\gamma_1] + [\gamma_2] := [\psi]$ donde $\psi(t) := \gamma_1(t) + \gamma_2(t) - p$ y definimos $\lambda[\gamma] := [\psi]$ con $\psi(t) := \lambda(\gamma(t) - p) + p$.

Ejercicio 2.1. 1. *Demuestra que las operaciones antes mencionadas están bien definidas.*

2. *Demuestra que $T_p\mathbb{R}^n$ con las operaciones arriba definidas es un espacio vectorial.*

3. *Sea γ_i la curva dada por $\gamma_i(t) := p + t\hat{e_i}$. Demuestra que los vectores $[\gamma_i] \in T_p\mathbb{R}^n$ forman una base.*

Ejercicio 2.2. *Define la noción de espacio tangente en p a la esfera unitaria $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a partir del conjunto $\{\gamma | \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^n, \gamma(0) = p\}$. En particular define la suma de vectores y el producto por un escalar. Finalmente demuestra que $T_p\mathbb{S}^n$ se puede identificar canónicamente con el subespacio vectorial $perp(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, p\rangle = 0\}$.*

Análogamente, define la noción de espacio tangente a una subvariedad.

Una referencia útil para estos ejercicios puede ser el capítulo 2 de *Introduction to differential topology* de Bröcker y Jänich.

2.2. Grupos de Lie y Algebras de Lie

Ejercicio 2.3. *Pensando a* $SO(n)$ *como subvariedad de* $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, *calcula el espacio tangente de* $SO(n)$.

3. Semana III

4. Semana IV

4.1. Haces vectoriales, campos vectoriales y formas diferenciales

Ejercicio 4.1. *Sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* n. *Sea* (U, ϕ) *una carta de* M. *Denotemos por* x_i *a las coordenadas de la función* ϕ, *es decir,* $\phi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$.

Sea $\gamma_i(t)$ *la curva que pasa por* p *dada por* $\gamma_i(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t\hat{e}_i)$ *y sea* $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) := [\gamma_i] \in T_pM$ *el vector tangente a* p *determinado por* γ_i

1. *Demuestra que* $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}_{i=1}^n$ *es una base de* T_pM.

2. *Denotemos por* $\{dx_i(p)\}_{i=1}^n$ *a la base dual de* T_p^*M, *dual a la base* $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}_{i=1}^n$. *Demuestra que* $d(x_i)(p) = dx_i(p)$ *es decir, la derivada exterior de la función* x_i *es igual al dual de* $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

3. *Sea* $f : M \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable sobre* M. *Demuestra que* $d(f)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(p)(f)dx_i$ *donde* $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)(f)$ *es la derivación asociada al vector* $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ *aplicada a la función* f.

4. *Sean* $f, g \in C^\infty(M)$. *Demuestra que* $d(fg) = d(f)g + fd(g)$.

Ejercicio 4.2. *Sean* ∂_i *los campos vectoriales (en el sentido de derivaciones) dados por*

$$(\partial_i)_p(g) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)$$

1. *Demuestra que* ∂_i *es un campo vectorial diferenciable en* $\mathbb{R}^n$.

2. *Recuerda que* $\Psi_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathscr{D}_p$ *dado por* $\Psi_p([\alpha])(g) = (g \circ \alpha)'(0)$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales. Demuestra que* $\Psi_p(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)) = (\partial_i)_p$, *donde* $\frac{\partial}{\partial x_i} = [\alpha_i]$ *con* $\alpha_i(t) = p + te_i$.

3. *Sea* X *un campo vectorial en* $\mathbb{R}^n$ *(esto es, una derivación* X_p *en* p, *para cada* $p \in \mathbb{R}^n$*). Recuerda que demostramos que* $\{(\partial_i)_p\}_{i=1}^n$ *es una base de las derivaciones en* p *(i.e.* $\mathscr{D}_p$*), por lo que para cada* $p \in \mathbb{R}^n$ *podemos expresar a* X_p *en esta base. Así, existen números* $a^i(p) \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p)(\partial_i)_p$$

Estos números, al variar de punto a punto, forman funciones $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Demuestra que* X *es un campo vectorial diferenciable si y sólo si las funciones* $\{a_i\}_{i=1}^n$ *son diferenciables.*

4. *Sea* X *un campo vectorial en la variedad* M. *Demuestra que* X *es diferenciable si y sólo si para todo* $p \in M$ *existe carta* (U, φ_U) *alrededor de* p *tal que* $D\varphi_U(X)$ *es un campo diferenciable en* $\varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^n$ *en el sentido del inciso anterior.*