Ejercicios Parcial II

Santiago Martínez, Román Contreras

19 de septiembre de 2017

1. Semana V

1.1. Haces y campos tensoriales

Ejercicio 1.1. *Sea $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ una 1−forma diferencial en $\mathbb{R}^2$. Es decir, f, g son funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^2$ y dx, dy son las 1−formas duales a los campos $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.*

Decimos que ω determina una ecuación diferencial y que una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ es una curva integral *de la ecuación diferencial determinada por ω si $\omega(\dot{\gamma}(t)) = 0$ es decir, para todo t el vector $\dot{\gamma}(t)$ yace en el núcleo de la transfomración lineal $\omega_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)} \to \mathbb{R}$. Decimos que ω es exacta si existe una función h tal que $d(h) = \omega$.*

1. *Sea γ una curva integral de la ecuación diferencial determinada por ω. Encuentra la ecuación lineal que satisface $\dot{\gamma}(t)$ en términos de f y g.*

2. *Supongamos que $\omega = d(h)$, es decir, ω es exacta. Demuestra que una curva γ es curva integral de ω si y sólo si es una parametrización de un conjuto de nivel de h.*

3. *Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(q,p) = -\cos(q) + p^2$ (la energía del péndulo matemático). Esboza los conjuntos de nivel de h y encuentra $d(h)$. Encuentra los puntos en donde $d(h)$ es identicamente cero.*

Ejercicio 1.2. *Demuestra que $\mathbb{S}^1$ es paralelizable, es decir, que $T\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ como haces vectoriales sobre $\mathbb{S}^1$.*

Ejercicio 1.3. *¿ La esfera $\mathbb{S}^2$ es paralelizable también? Construye un campo vectorial sobre $\mathbb{S}^2$ con exactamente dos ceros, y otro campo vectorial con exactamente un cero.*

Ejercicio 1.4. *Demuestra que una variedad M de dimensión n es paralelizable si y sólo si existen n campos vectoriales $\{X_i\}$ definidos sobre todo M tal que para cada punto $p \in M$ los vectores $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ forman una base de T_pM.*

2. Semana VI

2.1. La esfera

Recuerda que $\mathbb{S}^2$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ por lo que hereda una métrica riemanniana. Recuerda también que es posible identificar al espacio tangente $T_p\mathbb{S}^2$

con $p^{\perp} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot p = 0\right\}$. Si $M \in O(3)$ es una transformación ortogonal y $x \in \mathbb{S}^2$ entonces $Mx \in \mathbb{S}^2$. De este modo M se restringe a una transformación $M : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$.

Definicion 2.1. *Se dice que una variedad riemanniana es homogénea si para todo par de puntos $p, q \in M$ existe una isometría $f : M \to M$ tal que $f(p) = q$.*

Ejercicio 2.1.

1. *Demuestra que para todo $M \in O(3)$ la transformación $M : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ es una isometría.*

2. *Demuestra que para todo par de puntos $p, q \in \mathbb{S}^2$ existe una matriz $M \in O(3)$ tal que $Mp = q$. Concluye que $\mathbb{S}^2$ es homogénea. Pista: Demuestra que para todo $p \in \mathbb{S}^2$ existe $M' \in O(3)$ tal que $M'p = N$, donde $N = (0, 0, 1)$.*

Definicion 2.2. *Un marco en T_pM es una base ortogonal de T_pM*

Ejercicio 2.2.

1. *Sean $\beta_1 = \{v_1, v_2\}$ y $\beta_2 = \{w_1, w_2\}$ dos marcos en $T_N\mathbb{S}^2$ (donde $N = (0, 0, 1)$). Demuestra que existe $M \in O(3)$ tal que $M(\beta_1) = \beta_2$.*

2. *Demuestra que para todo par de puntos $p, q \in \mathbb{S}^2$ y todo par de marcos $\beta_1 \subset T_p\mathbb{S}^2$, $\beta_2 \subset T_q\mathbb{S}^2$ existe $M \in O(3)$ tal que $Mp = q$ y $M\beta_1 = \beta_2$.*

2.2. El plano hiperbólico

Definicion 2.3. *El plano hiperbólico bidimensional $\mathbb{H}^2$ es la variedad $\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ junto con la métrica*

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right)$$

Para cada matriz $A \in GL_2(\mathbb{R})$ (matrices invertibles de 2×2 con coeficientes reales) con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

consideren la transformación de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$Az = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ es pensado como un número complejo.

Ejercicio 2.3.

1. *Demuestra que, para toda matriz $A \in GL_2(\mathbb{R})$, la transformación asociada es una isometría de $\mathbb{H}^2$.*

2. *Demuestra que para todo $p \in \mathbb{H}^2$ existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que $Ap = i = (0, 1)$. Concluye que $\mathbb{H}^2$ es homogénea.*

Ejercicio 2.4. *Calcula el conjunto*

$$D = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid Ai = i\}$$

y demuestra que para todo par de marcos $\beta_1, \beta_2 \subset T_i\mathbb{H}^2$ existe $A \in D$ tal que $A\beta_1 = \beta_2$.