Flujo geodésico y la aplicación exponencial

Santiago Martínez, Román Contreras

20 de noviembre de 2017

Sea (M, g) una variedad riemanniana y ∇ la conección de Levi-Civita.

Ejercicio 0.1. *1. Sea γ una curva en M parametrizada con velocidad unitaria, es decir, $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ para todo t. Demuestra que $D_t\dot{\gamma}(t)$ es ortogonal a $\dot{\gamma}(t)$ para todo t.*

2. Si Γ es una variación propia de γ tal que para todo s, Γ_s es una reparametrización de γ, muestra que la primera variación de $L(\Gamma_s)$ se anula.

Ejercicio 0.2. *Sea $p \in M$ y sean $\mathcal{U} \subseteq T_pM$ y $\mathcal{V} \subseteq M$ dos abiertos tales que $exp_p : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es un difeomorfismo.*

1. *Demuestra que existe una isometría lineal $\psi : \mathbb{R}^n \to T_pM$ de $\mathbb{R}^n$ con el producto usual a T_pM con el producto dado por g_p.*

   Sea $norm_p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ la carta coordenada dada por $\psi^{-1} \circ exp_p^{-1}$.

2. *Demuestra que en esta carta, las componentes de la métrica evaluados en p son la delta de Kronecker, es decir, $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.*

3. *Demuestra que para cualquier vector $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, la curva $\gamma(t) := t\vec{v} = (tv_1, tv_2, \ldots, tv_n)$ que está definida en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, es la expresión en coordenadas de la geodésica que parte de p con velocidad $\psi(\vec{v})$.*

4. *Sean Γ_{ij}^k los símbolos de Christoffel de ∇ con respecto a la carta $norm_p$. Demuestra que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para cualesquiera tres índices i, j, k.*

5. *Demuestra que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0$ para cualesquiera tres índices i, j, k.*