# Isometrías

Román Contreras y Santiago Martínez

*

**Definicion 0.1.** *Una difeomorfismo $f : M \to N$ entre variedades riemannianas $(M, g^M)$ y $(N, g^N)$ es una isometría si para todo $p \in M$ y todo par de vectores tangentes $v, w \in T_pM$ se satisface*

$$g^N(Df_p(v), Df_p(w)) = g^M(v, w)$$

**Definicion 0.2.** *Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial, entonces $f$ induce un campo en $N$ llamado el push-foward de $X$, denotado por $f_*(X)$ y definido por*

$$f_*(X)_{f(p)} = Df_p(X_p)$$

**Ejercicio 0.1.** *Demuestra que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $f_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$.*

**Ejercicio 0.2.** *Demuestra que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces*

$$f_*([X, Y]) = [f_*(X), f_*(Y)]$$

En los ejercicios que siguen vamos ver que efecto tienen las isometrías en la derivada de los campos. En todo lo que sigue $f : M \to N$ es un difeomorfismo y $\nabla^N$ es una conexión en $N$.

**Ejercicio 0.3.** *Define $\nabla^M : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ como*

$$\nabla^M_X Y = \nabla^N_{f_*(X)} f_*(Y)$$

*Demuestra que $\nabla^M$ es una conexión en $M$. Esta llamada el pull-back de $\nabla^N$ a lo largo de $f$.*

**Ejercicio 0.4.** *Demuestra que si $\nabla^N$ es una conexión libre de torsión entonces $\nabla^M$ es libre de torsión.*

**Ejercicio 0.5.** *Demuestra que si $f$ es una isometría y $\nabla^N$ es compatible con la métrica, entonces $\nabla^M$ es compatible con la métrica.*

**Ejercicio 0.6.** *Demuestra que si $f$ es una isometría y $\nabla^N$ es la conexión de Levi-Civita de $N$ entonces $\nabla^M$ es la conexión de Levi-Civita de $M$.*

**Ejercicio 0.7.** *Concluye que si $f : M \to M$ es una isometría y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces*

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*(X)} f_*(Y)$$

**Ejercicio 0.8.** *Sea* $\alpha : I \to M$ *una curva diferenciable y* $\beta = f \circ \alpha$ *la curva imagen. Sea* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *un campo a lo largo de* $\alpha$ *y* $f_*(X)$ *el campo a lo largo de* $\beta$ *definido por* $f_*(X)(t) = Df_{\alpha(t)}(X(t))$*. Si* $D^\alpha$ *y* $D^\beta$ *denotan las derivadas covariantes a lo largo de* $\alpha$ *y* $\beta$*, respectivamente, y* $f$ *es una isometría, demuestra que*

$$f_*(D^\alpha X) = D^\beta f_*(X)$$

**Ejercicio 0.9.** *Demuestra que si* $f$ *es una isometría y* $\gamma : I \to M$ *es una geodésica entonces* $f \circ \gamma$ *es una geodésica.*

**Ejercicio 0.10.** *Demuestra que si* $p \in M$*,* $v \in T_pM$ *y* $f$ *es una isometría entonces* $f(exp_p(v)) = exp_{f(p)}(Df_p(v))$*.*

**Ejercicio 0.11** (2 pts)**.** *Demuestra que si* $M$ *es conexo y* $f, g : M \to N$ *son un par de isometrías tales que* $f(p) = g(p)$ *y* $Df_p = Dg_p$ *entonces* $f = g$*. Es decir que las isometrías están determinadas por su valor y su diferencial en un punto.*