Subvariedades y Métricas Inducidas

Ejercicios

October 31, 2017

Recuerden que si M es una variedad riemanniana entonces un subconjunto $S \subset M$ es una subvariedad encajada si para todo $p \in S$ existe una carta (U, φ_U) de M tal que

$$\varphi_U(U \cap S) \subset V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

Recuerden también que esto le daba una estructura de variedad a S usando las restricciones de φ_U a S (y proyectando a las primeras k-coordenadas) para conformar un atlas.

Ahora estudiaremos el caso cuando (M, g^M) es una variedad riemanniana. En todo lo que sigue, S es una subvariedad encajada de M y g^M es una métrica riemanniana en M.

Ejercicio 0.1. *Demuestra que la función $i : S \to M$ dada por $i(p) = p$ es diferenciable. Aquí nos referimos a diferenciable cuando a S se le da la estructura de variedad previamente descrita.*

Ejercicio 0.2. *Para cada $p \in S$ define la función $i_p : T_pS \to T_pM$ por*

$$i_p([\alpha]) = [i \circ \alpha]$$

Demuestra que i_p está bien definida y es una transformación lineal inyectiva. Traduce i_p a la versión de derivaciones.

El ejercicio anterior muestra que podemos pensar a los vectores de T_pS como vectores en T_pM. Luego si tenemos un par de vectores en T_pS podemos calcular su producto punto usando la métrica g^M.

Definicion 0.1. *La métrica inducida en S está dada por*

$$g_p^S(v, w) = g_p^M(i(v), i(w))$$

para todo $p \in S$, $v, w \in T_pS$.

Ejercicio 0.3. *Demuestra que g_p^S es una métrica riemanniana en S.*

Ejercicio 0.4. *Demuestra que para todo $p \in S$ existe una descomposición*

$$T_pM = iT_pS \oplus N_p$$

de tal forma que $g_p^M(v, w) = 0$ para todo $v \in iT_pS$ y $w \in N_p$. Luego todo vector $v \in T_pM$ se pude descomponer de manera única como $v = v^T + v^N$ donde $v^T \in iT_pS$, $v^N \in N_p$ y

$$g^M(v^T, v^N) = 0$$

(La notación v^T y v^N hacen referencia a que son las componentes tangentes y normales a S de v).

Ejercicio 0.5. *Define una transformación lineal* $P_p : T_pM \to T_pS$ *tal que* $i_p(P_p(v)) = v^T$. *Demuestra que* $Nuc(P_p) = N_p$ *y que si* $v, w \in iT_pS$ *entonces*

$$g^M(v, w) = g^N(P_p(v), P_p(w)) \tag{1}$$

De ahora en adelante evitaremos los subíndices P_p e i_p puesto que suele estar claro en el contexto el punto de referencia. Notemos que la P definida anteriormente se puede interpretar como la proyección ortogonal de los vectores en T_pM en los vectores de T_pS.

Ejercicio 0.6. *Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ *y* $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(S)$ *tales que* $\tilde{X}\big|_S = iX$ *y* $\tilde{Y}\big|_S = iY$. *Demuestra que es posible calcular los corchetes de Lie en* S *como*

$$[X, Y] = P([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

Sea ∇ cualquier conexión en M. Podemos definir la conexión inducida en S de la siguiente manera

Definicion 0.2. *La conexión inducida en* S *está dada por*

$$\nabla^S_X Y = P(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})$$

donde $\tilde{X}$ *y* $\tilde{Y}$ *son cualesquiera campos en* M *tales que* $\tilde{X}\big|_S = iX$ *y* $\tilde{Y}\big|_S = iY$.

Ejercicio 0.7. *Demuestra que* ∇^S *es una conexión en* S.

Ejercicio 0.8. *Demuestra que si* ∇ *es una conexión libre de torsión en* M *entonces* ∇^S *es libre de torsión.*

Ejercicio 0.9. *Demuestra que si* ∇ *es una conexión en* M *compatible con la métrica entonces* ∇^S *es compatible con la métrica inducida* g^s.

Ejercicio 0.10. *Usando los últimos resultados calcula la conexión en* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.