Contesta las preguntas en las hojas blancas que se te darán. Indica claramente el número de problema e inciso. No es necesario que copies la pregunta.
El total de puntos es 33. Si no entregaste el proyecto, se calificará sobre un total de 20 puntos. De lo contrario se calificará sobre un total de 10 puntos.

1. (7 Puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = |x|$.
   (a) (2 Puntos) Demuestra que la gráfica de f, $G_f = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$, no es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^2$.
   (b) (2 Puntos) Demuestra que G_f es la imagen de una función diferenciable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
   (c) (2 Puntos) Demuestra que existe una estructura diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que G_f es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^2$.
   (d) (1 Punto) Demuestra que $\mathbb{R}^2$ con la estructura diferenciable del inciso (c) es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$ con la estructura diferenciable canónica.

2. (7 Puntos) Sean M y N variedades diferenciables de la misma dimensión, compactas y conexas.
   (a) (3 Puntos) Si $f : M \to N$ es una función regular, diferenciable e inyectiva demuestra que f es un difeomorfismo.
   (b) (2 Puntos) Demuestra que si $f : M \to N$ es diferenciable y regular en $p \in M$ entonces la preimagen $f^{-1}(f(p))$ es finita y además existe un abierto $U \subset N$, vecindad de $f(p)$, tal que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ es una unión ajena de abiertos $V_i \subset M$ tales que $f|_{V_i} : V_i \to U$ es un difeomorfismo.
   (c) (2 Puntos) Demuestra que si f es regular en todo punto entonces la cardinalidad de $f^{-1}(f(p))$ es constante.

3. (2 Puntos) Demuestra que $(0, 1)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}$.

4. (10 Puntos) Recuerda que si N y M son dos variedades diferenciables entonces es posible definir un atlas en $M \times N$ de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_{M\times N} = \left\{(U \times V, \varphi_U^M \times \varphi_V^N) \mid (U, \varphi_U^M) \in \mathcal{A}_M \text{ y } (V, \varphi_V^N) \in \mathcal{A}_N\right\}$$

   donde $\mathscr{A}_M$ y $\mathscr{A}_N$ son los atlas de M y N respectivamente. Para toda función diferenciable $f : M \times N \to X$ (X es cualquier variedad) y para cualquier punto $(p, q) \in M \times N$ se pueden definir funciones $f_q^M : M \to X$ y $f_p^N : N \to X$ dadas por $f_q^M(p') = f(p', q)$ y $f_p^N(q') = f(p, q')$.
   (a) (3 Puntos) Demuestra que f_q^M y f_p^N son funciones diferenciables.
   (b) (3 Puntos) Sean $\pi_M : M \times N \to M$ y $\pi_N : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas, es decir las funciones definidas por $\pi_M(p, q) = p$ y $\pi_N(p, q) = q$. Dichas proyecciones son diferenciables (puedes suponer esto aunque no lo hayas demostrado). Para cada $(p, q) \in M \times N$ las diferenciales $(D\pi_M)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM$ y $(D\pi_N)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_qN$ se combinan en un mapeo $\Psi_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ dado por

$$\Psi_{(p,q)}(w) = \big((D\pi_M)_{(p,q)}(w), (D\pi_N)_{(p,q)}(w)\big)$$

   Demuestra que $\Psi_{(p,q)}$ es un isomorfismo lineal.
   (c) (4 Puntos) Demuestra que si $f : M \times N \to X$ es cualquier función diferenciable entonces para todo $w \in T_{(p,q)}M \times N$ con $\Psi_{(p,q)}(w) = (v_1, v_2)$ se tiene que

$$Df_{(p,q)}(w) = (Df_q^M)_p(v_1) + (Df_p^N)_q(v_2)$$

El siguiente diagrama puede ayudarles a interpretar el ejercicio anterior.

$$
\begin{tikzcd}
T_{(p,q)}(M \times N) \arrow[rr, "\Psi_{(p,q)}"] \arrow[dr, "Df_{(p,q)}"'] & & T_pM \times T_qN \arrow[dl, "(Df_q^M)_p+(Df_p^N)_q"] \\
& T_{f(p,q)}X &
\end{tikzcd}
$$

5. (7 Puntos) Sea $\mathbb{RP}^n := \left\{L \subset \mathbb{R}^{n+1} | L \text{ es un subespacio lineal de dimensión } 1\right\}$, llamado el espacio proyectivo n-dimensional. Nota que cualquier vector no nulo $x = (x_1, \cdots, x_{n+1})$ define un punto en $\mathbb{RP}^n$ denotado por $[x_1 : \cdots : x_{n+1}] = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. La primer parte de este problema es definir una estructura de variedad para $\mathbb{RP}^n$.

   (a) (1 Punto) Sea
   $$U_i = \left\{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ es tal que } x_i \neq 0\right\}$$
   Demuestra que $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{RP}^n$.

   (b) (1 Punto) Para cada $i = 1, \cdots, n+1$ define $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ por
   $$\varphi_i([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$
   Demuestra que φ_i está bien definida, es decir que si $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ y $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ son tales que $[x_1 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : \cdots : y_{n+1}]$ entonces $\varphi_i([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = \varphi_i([y_1 : \cdots : y_{n+1}])$. Demuestra también que las funciones φ_i son biyecciones.

   (c) (1 Punto) Encuentra los dominios de las funciones $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ y demuestra que dichas funciones son diferenciables.

   (d) (2 Puntos) $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$ es un atlas de $\mathbb{RP}^n$ y por lo tanto $\mathbb{RP}^n$ es una variedad diferenciable. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ una curva diferenciable que no pasa por el cero. Define $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{RP}^n$ como
   $$\beta(t) = [\alpha_1(t) : \cdots : \alpha_{n+1}(t)]$$
   Demuestra que β es diferenciable y calcula el vector tangente $\beta'(t)$ en términos de las cartas de $\mathcal{A}$.

   (e) (2 Puntos) Define $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^5$ la función dada por
   $$f([x : y : z]) = [x^2 : y^2 : z^2 : yz : xz : xy]$$
   Muestra que f está bien definida, es diferenciable y que es una inmersión.

Fin del exámen