- Contesta las preguntas en las hojas blancas que se te darán. Indica claramente el número de problema e inciso. No es necesario que copies la pregunta.
- El total de puntos es 47. Las preguntas están ordenadas en orden decreciente de puntos, es decir, lás primeras son las de mayor puntaje.
- Si no entregaste el proyecto, se calificará sobre un total de 20 puntos. De lo contrario se calificará sobre un total de 10 puntos.

1. (13 puntos) El plano hiperbólico es $\mathbb{H} := \mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ junto con la métrica

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right)$$

y sea ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g

(a) (3 puntos) Usando la fórmula de Koszul:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\left[Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\right]$$

calcula los símbolos de Christoffel para la carta canónica de $\mathbb{H}^2$. (Sugerencia: recuerda que los corchetes de campos coordenados se anulan identicamente)

(b) (1 punto) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y estrictamente positiva. Dada c una constante, define la función $\gamma_c : I \to \mathbb{H}$ como $\gamma(t) = (c, \alpha(t))$. Calcula el campo $\dot{\gamma}_c(t)$.

(c) (2 puntos) Sea D_t la derivada covariante sobre la curva γ_c asociada a la conexión. Calcula $D_t(\dot{\gamma}_c(t))$.

(d) (4 puntos) Encuentra α diferenciable y creciente tal que para toda $c \in \mathbb{R}$, la curva γ_c satisface que $D_t(\dot{\gamma}_c(t))$=0

(e) (3 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(z) = -1/z$, donde $z \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ es considerado como un número complejo. Demuestra que f es una isometría de $\mathbb{H}^2$.

2. (10 puntos) Recuerda que si $\alpha : I \to M$ es un curva difereciable en la variedad es posible definir, a partir de una conexión, un operador $D_t : \mathfrak{X}(\alpha) \to \mathfrak{X}(\alpha)$ sobre los campos vectoriales a lo largo de α, llamada la derivada covariante, tal que

a) $D_t(X + Y) = D_t X + D_t Y$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$

b) $D_t(fX) = \frac{df}{dt}X + fD_t X$ para todos $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y $f : I \to \mathbb{R}$.

Se dice que un campo $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo (a lo largo de α) si $D_t X = 0$. Recuerden que demostramos lo siguiente: Para todo $t_0 \in I$ y $v \in T_{\alpha(t_0)}M$, existe un único campo paralelo $X_v \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $X_v(t_0) = v$. El transporte paralelo a lo largo de α es una familia de funciones $P_s : T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t_0+s)}M$ definidas por

$$P_s(v) = X_v(t_0 + s)$$

(a) (3 puntos) Demuestra que P_s es una transformación lineal

(b) (1 punto) Demuestra que si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de $T_{\alpha(t_0)}M$ entonces $\{X_{v_1}(t), \cdots, X_{v_n}(t)\}$ es una base de $T_{\alpha(t)}M$ para toda $t \in I$.

(c) (2 puntos) Demuestra que P_s es un isomorfismo lineal.

(d) (4 puntos) Demuestra que si $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$ entonces

$$D_t X(t_0) = \lim_{s \to 0} \frac{P_s^{-1}(X(t_0 + s)) - X(t_0)}{s}$$

3. (6 puntos) Sea ∇ la conexión en $\mathbb{R}^3$ definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ccc} \nabla_X X = 0 & \nabla_X Y = -Z & \nabla_X Z = Y \\ \nabla_Y Y = 0 & \nabla_Y X = Z & \nabla_Y Z = -X \\ \nabla_Z Z = 0 & \nabla_Z X = -Y & \nabla_Z Y = X \end{array}$$

   Donde X, Y, Z son los campos canónicos (es decir: $X = \partial_x$, $Y = \partial_y$ y $Z = \partial_z$).

   (a) (1 punto) Calcula la torsión de la conexión ∇

   (b) (2 puntos) Demuestra que ∇ es compatible con la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$

   (c) (3 puntos) Sea $V_1 = \cos(z)X + \sin(z)Y$ y $V_2 = \cos(z + \pi/2)X + \sin(z + \pi/2)Y$. Demuestra que $\nabla_Z V_1 = 0$ y que $\nabla_Z V_2 = 0$. Demuestra que $\{Z, V_1, V_2\}$ son un marco ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

   (d) ¿Qué nos dice el inciso anterior sobre el transporte paralelo de la conexión ∇ a lo largo de rectas paralelas al eje z?

4. (6 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $\omega = \frac{1}{2}(dx \otimes dy - dy \otimes dx)$. (A ω se le llama la forma simpléctica de $\mathbb{R}^2$)

   (a) (3 puntos) Demuestra que existe un único campo vectorial X_f tal que $df = \omega(X_f, -)$, es decir, que para cualquier otro campo Y se tiene que $df(Y) = \omega(X_f, Y)$. Dicho campo recibe el nombre de *campo hamiltoniano* de f.

   (b) (1 punto) Demuestra que X_f es tangente a los conjuntos de nivel de f.

   (c) (2 puntos) Sea $f(x, y) = -\cos(x) + y^2$. Esboza los conjuntos de nivel de f y el campo X_f. ¿Qué puedes decir de las curvas integrales de X_f? ¿X_f tiene puntos fijos (equilibrios)? ¿tiene órbitas periódicas? ¿tiene órbitas no acotadas?

5. (5 puntos) Sea ∇ una conexión en M. Denotaremos el espacio vectorial de los 1-tensores sobre M por $\Omega_1(M)$.

   (a) (3 puntos) Define el operador $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega_1(M) \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\tau(X, Y, \omega) := \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

   Demuestra que τ es un campo $\binom{2}{1}$-tensorial.

   (b) (2 puntos) Demuestra que si $\tau = 0$, entonces los símbolos de Christoffel de ∇ con respecto a un marco coordenado son simétricos con respecto a los índices inferiores, es decir: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

6. (5 puntos) (a) (2 puntos) Encuentra un campo X en $\mathbb{R}^2$ tal que $X(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero que $[\partial_x, X] \neq 0$ en el eje x. (Esto demuestra que la derivada de Lie no da una manera adecuada de derivar campos a lo largo de curvas)

   (b) (2 puntos) Demuestra que la derivada de Lie no es una conexión.

   (c) (1 punto) ¿ Es cierto que si ∇_1 y ∇_2 son dos conexiones y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\nabla_1 + \nabla_2$ es una nueva conexión?

7. (2 puntos) Sea ∇ una conexión sobre M y $\gamma : I \to M$ una curva constante. Sea $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

   Demuestra que $D_t(X)(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(X(t + h) - X(t))$, donde D_t es la derivada covariante sobre γ asociada a ∇.

$\boxed{\text{Fin del exámen}}$