- Contesta las preguntas en las hojas blancas que se te darán. Indica claramente el número de problema e inciso. No es necesario que copies la pregunta.
- El total de puntos es 15. El examen se calificará sobre 10 puntos.

1. (5 puntos) Sea $M = \mathbb{R}^n$ y $g = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita compatible con g.
   (a) (1 punto) Sean X y Y dos campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^n$, calcula $\nabla_X Y$.
   (b) (1 punto) Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva lisa que conecta los puntos $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Sea $v \in T_p\mathbb{R}^n$. Encuentra un campo $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ que sea paralelo y tal que $V(a) = v$.
   (c) (1 punto) Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $v \in T_p\mathbb{R}^n$ un vector tangente. Encuentra la geodésica que pasa por p con velocidad v.
   (d) (2 puntos) Calcula la aplicación exponencial $\exp : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y demuestra que está definida globalmente.

2. (10 puntos) Recordemos algunos hechos sobre subvariedades. Sea $(\tilde{M}, \tilde{g})$ una variedad riemanniana. Sea (M, g) otra variedad riemanniana y $i : M \to \tilde{M}$ un encaje tal que $i^*(\tilde{g}) = g$. Dicho de otro modo, M es una subvariedad encajada de $\tilde{M}$ y g es la métrica inducida en M por la métrica $\tilde{g}$. Sea $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $(\tilde{M}, \tilde{g})$. En cada punto $p \in M$, el espacio tangente $T_p\tilde{M}$ se descompone en una suma directa ortogonal $T_p\tilde{M} = T_pM \oplus N_p$ donde $N_p = (T_pM)^\perp$ es el complemento ortogonal de T_pM con respecto a $\tilde{g}$. Sea $\pi_p^T : T_p\tilde{M} \to T_pM$ la proyección en el subespacio T_pM.

   Sean X y Y dos campos vectoriales en M que se pueden extender (al menos localmente) a campos $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ en $\tilde{M}$. Sea $\nabla_X Y|_p := \pi^T(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p)$. El operador ∇ es una conexión que es simétrica y compatible con g por lo que de hecho es la conexión de Levi-Civita de (M, g). Dicho de otro modo, una manera de calcular $\nabla_X Y$ donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de (M, g) es extender los campos X y Y a campos en $\tilde{M}$, calcular $\tilde{\nabla}_X Y$ y proyectar el vector resultante a T_pM.
   (a) (2 puntos) Sea γ una curva en M y $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$, demuestra que $D_t V(t) = \pi^T_{\gamma(t)}(\tilde{D}_t V)$. Donde $\tilde{D}_t$ es la derivada covariante a lo largo de γ en $\tilde{M}$ y D_t es la derivada covariante en M.
   (b) (2 puntos) Demuestra que γ es una geodésica de M si y sólo si $D_t\dot{\gamma}(t)$ es ortogonal a $T_{\gamma(t)}M$ para todo t.
   Sea $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$, $\tilde{g} = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ y $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Sea g la métrica inducida en $\mathbb{S}^{n-1}$ bajo la inclusión.
   (c) (2 puntos) Sea $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $v \in T_p\mathbb{S}^{n-1}$. Calcula la geodésica de $\mathbb{S}^{n-1}$ que parte de p con velocidad v.
   (d) (4 puntos) Sea $\exp_p : T_p\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ la aplicación exponencial. Demuestra que $\exp_p$ está definida en todo $T_p\mathbb{S}^{n-1}$. Encuentra una fórmula explícita para $\exp_p(v)$ ¿ Es $\exp_p$ inyectiva?

Fin del examen