- Contesta las preguntas en las hojas blancas que se te darán. Indica claramente el número de problema e inciso. No es necesario que copies la pregunta.
- El total de puntos es 14. El examen se calificará sobre 10 puntos.

1. (8 puntos) Recuerda que una superficie de revolución tiene una parametrización global dada por

$$\Gamma(u,v) = \big(g(u), \cos(v)f(u), \mathrm{sen}(v)f(u)\big)$$

donde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables con $f > 0$ y $(f'(t), g'(t)) \neq 0$ para toda t. Dicha parametrización induce un par de campos vectoriales globales sobre toda la superficie de revolución denotados por ∂u, ∂v.

(a) (2 puntos) Demuestra que los componentes de la métrica bajo esta parametrización están dados por

$$g_{uu} = (g'(u)^2 + f'(u)^2)$$
$$g_{uv} = g_{vu} = 0$$
$$g_{vv} = f(u)^2$$

(b) (3 puntos) Recordando que la fórmula de Koszul en coordenadas locales se reduce a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

calcula los símbolos de Christoffel de la superficie de revolución.

(c) (3 puntos) Calcula la curvatura seccional $K(T_pS)$ para todo punto p en la superficie de revolución S.

2. (3 puntos) Demuestra que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la métrica usual no es una variedad riemanniana completa.

3. (3 puntos) Sea M una variedad Riemanniana tal que

$$\mathrm{Rm}(X, Y, Y, X) \leq 0$$

para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Sean $p \in M$ y γ una geodésica que parte de p. Demuestra que p no tiene puntos conjugados a lo largo γ. [Sugerencia: Usa la ecuación de Jacobi para demostrar que $\frac{d}{dt} g(J', J) \geq 0$ y nota que $\frac{d}{dt} g(J, J) = 2g(J', J)$]

Fin del examen