Vectores tangentes

Santiago Martínez, Román Contreras

*

Contents

1 Introducción

Las funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son muy útiles puesto que asumimos que tienen un comportamiento infinitesimal muy simple. A secas una función diferenciable es infinitesimalmente afín (lineal más constante). Su utilidad proviene del hecho de que podemos extrapolar información de la función simple (la diferencial de f) al comportamiento de la función f (al menos cerca del punto). Ahora queremos transportar esta noción a una variedad abstracta.

Ya hemos definido que una función $f : M \to N$ entre variedades es diferenciable si cada una de sus representaciones coordenadas lo es. Una representación coordenada $\tilde{f}$ de f tiene derivada en todo punto, pero ¿qué nos está diciendo la derivada $D\tilde{f}$, que a fin de cuentas es una representación arbitraria de f, acerca de f?

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. La siguiente proposición brinda un método útil para calcular la diferencial de f en un punto $p \in U$.

Proposicion 1.1. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$. Para calcular la diferencial Df_p evaluada en v basta con encontrar cualquier curva diferenciable $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, con $\varepsilon > 0$, tal que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = v$. Con esta curva*

$$Df_p(v) = (f \circ \beta)'(0)$$

Prueba Esto no es más que la regla de la cadena: Como β es diferenciable en 0 y f es diferenciable en $\beta(0) = p$ entonces $f \circ \beta$ es diferenciable en 0 y

$$(f \circ \beta)'(0) = Df_p(\beta'(0)) = Df_p(v)$$

$\square$

Es importante notar que β es cualquier curva que pase por p y tenga a v como vector tangente. La curva β tiene a v como dirección infinitesimal en p y se transforma, bajo f, a una nueva curva $\alpha = f \circ \beta$, que tiene a $Df_p(v)$ como nueva dirección infinitesimal.

Es por eso que es posible pensar a la diferencial de f en p como la función que determina como se transforman las "direcciones infinitesimales" en p.

2 Vectores tangentes como curvas

Usando la observación anterior como pauta, haremos una generalización a variedades. Un vector tangente en $p \in M$ será una dirección infinitesimal, representada por una curva. Sin embargo varias curvas representan la misma dirección infinitesimal.

Definicion 2.1. *Sean $\alpha : I_1 \to M$ y $\beta : I_2 \to M$ dos curvas diferenciables con $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos con $0 \in I_1, I_2$ tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p \in M$. Decimos que α y β representan la misma dirección infinitesimal en p, y lo denotamos por $\alpha \sim_p \beta$, si existe alguna carta (U, φ_U) de M cerca de p tal que*

$$(\varphi_U \circ \alpha)'(0) = \bar{\alpha}'(0) = \bar{\beta}'(0) = (\varphi_U \circ \beta)'(0)$$

Nota En todo lo que sigue usaremos $\bar{\delta}$ para denotar a la representación coordenada de δ en una carta (U, φ_U). Aquí δ puede ser una curva $\delta : I \to M$, en cuyo caso $\bar{\delta} = \varphi_U \circ \delta$, una función $\delta : M \to \mathbb{R}$, en cuyo caso $\bar{\delta} = \delta \circ \varphi_U^{-1}$, o simplemente un punto $\delta \in U$, en cuyo caso $\bar{\delta} = \varphi_U(\delta)$.

Notemos que los dominios de definición de α y β no son tan relevantes, la información importante está contenida en una vecindad arbitrariamente pequeña del 0.

Definimos la relación $\sim_p$ en base a la existencia de sólo una representación coordenada común para β y α. Sin embargo, como es usual, la relación de tener la misma dirección infinitesimal no depende de la representación coordenada elegida.

Proposicion 2.1. *Sean $\alpha : I_1 \to M$ y $\beta : I_2 \to M$ curvas diferenciales tales que $\alpha \sim_p \beta$. Si (V, φ_V) es cualquier carta alrededor de p y $\hat{\alpha} = \varphi_V \circ \alpha$, $\hat{\beta} = \varphi_V \circ \beta$ sus representaciones coordenadas entonces*

$$\hat{\alpha}'(0) = \hat{\beta}'(0)$$

Ejercicio 2.1. *Demuéstralo.*

Nota Es un tanto extraño definir la relación $\sim_p$ en base a la existencia de <u>una</u> carta bajo la cual sus representaciones coordenadas tienen el mismo vector tangente, cuando hemos demostrado que esto implica lo mismo para <u>cualquier</u> carta. Sin embargo esto es por conveniencia: de este modo para demostrar $\alpha \sim_p \beta$ basta con encontrar <u>una</u> carta bajo la cual $\bar{\alpha}'(0) = \bar{\beta}'(0)$, y hay veces en las cuales la elección de una carta particular simplifica mucho la demostración. Por otro lado también es útil la proposición anterior puesto que la hipótesis $\alpha \sim_p \beta$ implica que $\bar{\alpha}'(0) = \bar{\beta}'(0)$ para <u>cualquier</u> representación coordenada. Así que uno puede usar esta información en la carta que uno guste.

Proposicion 2.2. *La relación $\sim_p$ es una relación de equivalencia.*

Prueba Demostrar la identidad y simetría de la relación es muy sencillo, así que basta con demostrar la transitividad de la relación. Supongamos que $\alpha : I_1 \to M$, $\beta : I_2 \to M$ y $\gamma : I_3 \to M$ son tres curvas diferenciales con $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = p$ y tales que

$$\alpha \sim_p \beta$$
$$\beta \sim_p \gamma$$

Esto implica que existe un par de cartas (U, φ_U) y (V, φ_V) tales que si $\bar{\alpha} = \varphi_U \circ \alpha$, $\bar{\beta} = \varphi_U \circ \beta$, $\hat{\beta} = \varphi_V \circ \beta$ y $\hat{\gamma} = \varphi_V \circ \gamma$, entonces

$$\bar{\alpha}'(0) = \bar{\beta}'(0)$$
$$\hat{\beta}'(0) = \hat{\gamma}'(0)$$

Notemos que $\hat{\alpha} = \varphi_V \circ \alpha = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} \circ \varphi_U \alpha = \Psi_U^V \circ \bar{\alpha}$ y por lo mismo $\hat{\beta} = \Psi_U^V \circ \bar{\beta}$, donde Ψ_U^V es el cambio de coordenadas de U a V. Dado que Ψ_U^V es un difeomorfismo (como función $\Psi_U^V : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) entonces por la regla de la cadena

$$\hat{\beta}'(0) = D\Psi_U^V(\bar{\beta}'(0)) = D\Psi_U^V(\bar{\alpha}'(0)) = \hat{\alpha}'(0)$$

pero como $\hat{\gamma}'(0) = \hat{\beta}'(0)$, entonces $\hat{\gamma}'(0) = \hat{\alpha}'(0)$, y por lo tanto $\alpha \sim_p \gamma$. $\square$

Dado que dos vectores son equivalentes si tienen la misma dirección infinitesimal (en una y por lo tanto en todas las cartas) entonces la clase de equivalencia $[\alpha]_{\sim_p} = \{\beta : I \to M \mid \beta(0) = p, \beta \sim_p \alpha\}$ en cierto modo representa una dirección infinitesimal, sin importar la curva que lo represente.

Definicion 2.2. *Un vector tangente de M en p es una clase de equivalencia de la relación $\sim_p$. El espacio tangente T_pM es la colección de vectores tangente a M en p:*

$$T_pM = \left\{ [\alpha]_{\sim_p} \mid \alpha : I \to M \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \right\} \tag{1}$$

Noten que cada curva que pasa por p determina un vector tangente.

Definido así, la noción de vector tangente y espacio tangente no depende de coordenadas, sino de curvas y una noción de equivalencia de dirección. Aunque la noción de equivalencia depende de modo indirecto de cartas, hemos demostrado que realmente no depende de las coordenadas elegidas. Con esta construcción hemos ganado en generalidad, pero hemos llegado a una noción un tanto abstracta e inmanejable.

Sin embargo, tiene otra ventaja: con esta noción de vector tangente es fácil generalizar la definición de la diferencial de una función.

Definicion 2.3. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y $p \in M$. La diferencial o derivada de f en p es la función $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida por*

$$Df_p([\alpha]_{\sim_p}) = [f \circ \alpha]_{\sim_{f(p)}}$$

La imagen de vector tangente (clase de equivalencia de curvas) es la clase de equivalencia de la curva imagen. La diferencial de f en p también es denotada T_pf, df_p.

Ejercicio 2.2. *Demuestra que la definición antes dada está bien definida, es decir no depende del representante de la clase de equivalencia. Más explícitamente: Si* $\alpha : I_1 \to M$*,* $\beta : I_2 \to M$ *son curvas diferenciables con* $\alpha(0) = \beta(0)$ *y* $\alpha \sim_p \beta$*, y* $f : M \to N$ *es una función diferenciable entre variedades, entonces* $f \circ \alpha \sim_{f(p)} f \circ \beta$*.*

La definición anterior es una calca de la proposición 1.1. Sin embargo, en la versión clásica de la diferencial podíamos afirmar que dicha función además era lineal.

Para transferir esa proposición al caso general habría que empezar con brindarle al espacio tangente T_pM una estructura de espacio vectorial. Aunque esto no es difícil, sí es un poco engorroso.

Definicion 2.4. *Sea* $p \in M$ *y* (U, φ_U) *una carta alrededor de* p*. Dado que estamos trabajando en un único punto, podemos dispensar de la notación saturada de* $[\alpha]_{\sim_p}$ *para reemplazarla temporalmente por* $[\alpha]$*, esto es, por el momento (o mientras no haya confusión con la relación y el punto en cuestión)* $[\alpha] = [\alpha]_{\sim_p}$*. Definimos una estructura de espacio vectorial en* T_pM *de la siguiente manera:*

1. *Si* $[\alpha], [\beta] \in T_pM$ *entonces*

$$[\alpha] + [\beta] = \left[\varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right)\right]$$

2. *Si* $c \in \mathbb{R}$ *y* $[\alpha] \in T_pM$ *entonces*

$$c\,[\alpha] = \left[\varphi_U^{-1}\left(c\bar{\alpha} - (c-1)\bar{p}\right)\right]$$

Nota φ_U brinda un modo de representar curvas α y β con coordenadas, a saber $\bar{\alpha} = \varphi_U \circ \alpha$ y $\bar{\beta} = \varphi_U \circ \beta$. Estas son curvas que en 0 pasan por $\bar{\alpha}(0) = \bar{\beta}(0) = \varphi_U(\beta(0)) = \varphi_U(p) = \bar{p}$. Cada una tiene un vector tangente en 0 distinto, digamos $v = \bar{\alpha}'(0)$ y $w = \bar{\beta}'(0)$. Por tanto la suma de dichas curvas $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ es una curva que tiene como vector tangente $(\bar{\alpha} + \bar{\beta})'(0) = v + w$. Sin embargo en 0 pasa por $(\bar{\alpha} + \bar{\beta})(0) = \bar{\alpha}(0) + \bar{\beta}(0) = 2\bar{p}$, luego la curva

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}$$

Es una curva que pasa por $\bar{p}$ en 0 y tiene a $v + w$ como vector tangente. Por tanto, esta curva es buen representante de la suma de las direcciones de α y β, por lo que basta transportarla de regreso a M con la carta φ_U^{-1} para obtener la curva que debería de representar la suma de direcciones. Esto es lo que hemos hecho:

$$[\alpha] + [\beta] = \left[\varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right)\right]$$

Una linea de pensamiento similar justifica la definición de $c[\alpha]$.

Hay que ser cuidadosos con algunos detalles de los dominios, puesto que la suma sólo estaría definida en la intersección de los dominios, y a su vez las curvas $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ sólo están definidas cuando caen en el pedazo de espacio representado con coordenadas, i.e. U. Estas consideraciones se dejan para el ejercicio del lector.

En el apéndice A.1 demostramos que las operaciones de suma y producto por escalar están bien definidas y que con ellas T_pM es un espacio vectorial.

Ya que hemos definido la estructura de espacio vectorial podemos demostrar que la diferencial es una transformación lineal.

Proposicion 2.3. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades y $p \in M$. La diferencial $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una transformación lineal.*

Prueba Usaremos la siguiente notación: $[\alpha]_{\sim_p} = [\alpha]_p$ y $[\beta]_{\sim_{f(p)}} = [\beta]_{f(p)}$.

Sean $[\alpha]_p, [\beta]_p \in T_pM$ dos vectores. Queremos demostrar que

$$Df_p([\alpha]_p + [\beta]_p) = Df_p\left([\alpha]_p\right) + Df_p\left([\beta]_p\right) \tag{2}$$

Sean (U, φ_U) y (V, φ_V) cartas de M y N alrededor de p y $f(p)$ respectivamente. Usaremos $\bar{\delta}$ para denotar la representación de δ con φ_U, i.e. $\bar{\delta} = \varphi_U \circ \delta$, y $\hat{\delta}$ para denotar la representación de δ con φ_V, i.e. $\hat{\delta} = \varphi_V \circ \delta$. Luego el vector $[\alpha]_p + [\beta]_p$ está representado por

$$[\gamma]_p = [\alpha]_p + [\beta]_p = \left[\varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right)\right]_p$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} Df_p([\alpha]_p + [\beta]_p) &= Df_p\left([\gamma]_p\right) \\ &= [f \circ \gamma]_{f(p)} \\ &= \left[f \circ \varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right)\right]_{f(p)} = [\nu_1]_{f(p)} \end{aligned}$$

Por otro lado $Df_p([\alpha]_p) = [f \circ \alpha]_{f(p)}$ y $Df_p\left([\beta]_p\right) = [f \circ \beta]_{f(p)}$, por lo que

$$\begin{aligned} Df_p([\alpha]_p) + Df_p\left([\beta]_p\right) &= [f \circ \alpha]_{f(p)} + [f \circ \beta]_{f(p)} \\ &= \left[\varphi_V^{-1}\left(\varphi_V \circ f \circ \alpha + \varphi_V \circ f \circ \beta - \varphi_V(f(p))\right)\right]_{f(p)} \\ &= [\nu_2]_{f(p)} \end{aligned}$$

Así, demostrar (2) es equivalente a demostrar que $\nu_1 \sim_{f(p)} \nu_2$. Para esto usamos la carta (V, φ_V) para representar con coordenadas las curvas ν_1 y ν_2. Noten que

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_1 = \varphi_V \circ \nu_1 &= \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \varphi_U(p)\right) \\ &= \tilde{f} \circ \left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \varphi_U(p)\right) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_2 &= \varphi_V \circ f \circ \alpha + \varphi_V \circ f \circ \beta - \varphi_V(f(p)) \\ &= \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} \circ \varphi_U \alpha + \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} \circ \varphi_U \circ \beta - \varphi_V(f(p)) \\ &= \tilde{f} \circ \bar{\alpha} + \tilde{f} \circ \bar{\beta} - \varphi_V(f(p)) \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena

$$\hat{\nu}_1'(0) = D\tilde{f}_{\varphi_U(p)}\left(\bar{\alpha}'(0) + \bar{\beta}'(0)\right) = D\tilde{f}_{\varphi_U(p)}(\bar{\alpha}'(0)) + D\tilde{f}_{\varphi_U(p)}(\bar{\beta}'(0)) = \hat{\nu}_2'(0)$$

En conclusión $\hat{\nu}_1'(0) = \hat{\nu}_2'(0)$, $\nu_1 \sim_{f(p)} \nu_2$ y por lo tanto $Df_p([\alpha] + [\beta]) = Df_p([\alpha]) + Df_p([\beta])$. □

Ejercicio 2.3. *Demuestra que $Df_p(c\,[\alpha]_p) = cDf_p([\alpha])$.*

3 Vectores tangentes como derivaciones

Como hemos visto, manejar a los vectores tangentes como clases de equivalencia de curvas puede llegar a ser bastante tedioso. Aunque la idea de una clase de equivalencia como representante de una dirección infinitesimal es relativamente directa, ahora hemos de dejar de lado la idea geométrica de un vector tangente como una dirección infinitesimal dada por una curva para adoptar otra visión que frecuentemente facilita el trabajo.

Comencemos en $\mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^n$ toda dirección infinitesimal $[\alpha]$ puede ser representada fielmente por su vector tangente $\alpha'(0)$. Y todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ representa una dirección infinitesimal, puesto que define una curva $\alpha_v^p(t) = p + tv$ que lo tiene como vector tangente.

Ejercicio 3.1. *Formaliza el párrafo anterior demostrando que $\psi : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $[\alpha] \mapsto \alpha'(0)$ es un isomorfismo.*

Así que en $\mathbb{R}^n$ podemos identificar los vectores tangentes con vectores en $\mathbb{R}^n$. Una modo de representar direcciones infinitesimales lo proveen las curvas, sin embargo ahora las usaremos las “derivaciones” para representarlas.

Definicion 3.1. *Sea M una variedad. El álgebra de funciones diferenciables es*

$$C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es de tipo } C^\infty\}$$

Notemos que en $C^\infty(M)$ se pueden sumar y multiplicar funciones puntualmente. En particular las funciones de $C^\infty(M)$ se pueden multiplicar por constantes $c \in \mathbb{R}$, haciéndolo un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Para cada $v \in \mathbb{R}^n$ (que estamos pensando como una dirección infinitesimal en $p \in \mathbb{R}^n$) podemos definir un operador

$$D_v^p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

como

$$D_v^p(f) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h} = Df_p(v)$$

Esto es D_v^p es la derivada direccional en p, en la dirección de v.

Proposicion 3.1. *El operador D_v^p satisface*

1. *D_v^p es lineal.*
2. *$D_v^p(fg) = D_v^p(f)g(p) + f(p)D_v^p(g)$*

Prueba Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $c \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la curva dada por $\alpha(t) = p + tv$. Luego para toda $h \in C^\infty(M)$

$$D_v^p(h) = \lim_{t\to 0} \frac{h(p+tv) - h(p)}{t} = (h \circ \alpha)'(0)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_v^p(f+cg) &= ((f+cg)\circ\alpha)'(0) \\ &= (f\circ\alpha)'(0) + c\,(g\circ\alpha)'(0) \\ &= D_v^p(f) + cD_v^p(g) \end{aligned}$$

Y también

$$\begin{aligned}
D_v^p(fg) &= ((fg)\circ\alpha)'(0) \\
&= ((f\circ\alpha)(g\circ\alpha))'(0) \\
&= (f\circ\alpha)'(0)\,(g\circ\alpha)(0) + (f\circ\alpha)(0)(g\circ\alpha)'(0) \\
&= D_v^p(f)g(p) + f(p)D_v^p(g)
\end{aligned}$$

$\square$

Resulta que los operadores derivadas direccionales son buenos representantes de vectores en el siguiente sentido

Proposicion 3.2. *Si $v \neq w$ entonces $D_v^p \neq D_v^p$.*

Prueba Decir que dos operadores $T, S : V \to \mathbb{R}$ son diferentes (o iguales) es decir que existe $v \in V$ tal que $T(v) \neq S(v)$ (para todo $v \in V$ se tiene que $T(v) = S(v)$). Luego para demostrar que $D_v^p \neq D_w^p$ hay que encontrar alguna función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $D_v^p(f) \neq D_w^p(f)$.

Los operadores de derivada direccional D_v^p miden la tasa de cambio infinitesimal de la función f en la dirección de v, por lo que basta con encontrar una función que varíe de modo distinto en la dirección v que en la dirección w. Existen infinidad de funciones con estas propiedades, pero daremos una que es práctica por su simplicidad.

Sea $f(x) = x \cdot v - x \cdot w$. Es claro que f es diferenciable y que además

$$\begin{aligned}
D_z^p(f) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(p+hz) - f(p)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(p+hz)\cdot v - (p+hz)\cdot w - p\cdot v + p\cdot w}{h} \\
&= z\cdot(v-w)
\end{aligned}$$

Luego $D_v^p(f) = v\cdot(v-w) \neq w\cdot(v-w) = D_w^p(f)$ puesto que de lo contrario $(v-w)\cdot(v-w) = 0$ lo cual implica $v = w$. $\square$

Ahora que hemos visto que las derivadas direccionales sirven para representar vectores, y que además satisfacen ciertas propiedades fácilmente generalizables, no es descabellado pensar que una abstracción de este concepto podría servir para capturar la noción de espacio tangente.

Definicion 3.2. *Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Una derivación en p es una transformación lineal*

$$D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$$

El conjunto de derivaciones en p es denotado por

$$\mathscr{D}_p = \{D : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid D \textit{ es derivación}\}$$

Si D es una derivación y f es una función constante, digamos $f(p) = c$ para toda p, entonces $D(f) = 0$. Para ver esto podemos escribir a f como $f = c\mathbf{1}$ donde $\mathbf{1}$ es la función con $\mathbf{1}(p) = 1$ para todo $p \in M$. Luego $D(f) = cD(\mathbf{1}) = cD(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = c\,(D(\mathbf{1})1 + 1D(\mathbf{1})) = 2cD(\mathbf{1})$. De aquí se sigue que $D(f) = 0$.

Las derivaciones "son" como operadores de derivada direccional, cada derivación representa derivar en una dirección. Así otro modo de definir espacio tangente en p sería a través de las derivaciones $\mathscr{D}_p = T_pM$. Pero habría que justificar dicha afirmación, puesto que ya tenemos otra noción de vector tangente.

En primero lugar observemos que

Proposicion 3.3. *El conjunto de derivaciones en p es un espacio vectorial.*

Prueba Para esto basta con definir la suma y la multiplicación por escalares. Notemos que si $D, S \in \mathscr{D}_p$ son un par de derivaciones y $c \in \mathbb{R}$ entonces se puede definir derivaciones

$$(D + S)(f) = D(f) + S(f) \tag{3}$$

$$(cD)(f) = cD(f) \tag{4}$$

Verificar que con estas operaciones $\mathscr{D}_p$ es un espacio vectorial es sencillo. □

Como en el caso de curvas diferenciales como vectores tangentes, es relativamente fácil definir la derivada de una función en términos de derivaciones.

Definicion 3.3. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y $p \in M$. La diferencial de la función $Df_p^* : \mathscr{D}_p \to \mathscr{D}_{f(p)}$ está definida de la siguiente manera: Si $D \in \mathscr{D}_p$ es una derivación, entonces $Df_p^*(D)$ es la derivación en $f(p)$ tal que para todo $g \in C^\infty(N)$ se tiene que*

$$(Df_p^*(D))(g) = D(g \circ f)$$

Nota El caso de $\mathbb{R}^n$: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, $p \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n$. La función f transforma a la dirección v en el vector $w = Df_p(v)$. A cada vector se le asocia su operador de derivada direccional correspondiente, D_v^p y $D_w^{f(p)}$. Notemos que si $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} D_w^{f(p)}(h) &= Dh_{f(p)}(w) \\ &= Dh_{f(p)}(Df_p(v)) \\ &= D(h \circ f)_p(v) \\ &= D_v^p(f \circ h) \\ &= Df_p^*(D_v^p)(h) \end{aligned}$$

Luego $D_w^{f(p)} = D_p^*(D_v^p)$. Esto es, la diferencial Df_p^* es compatible con la diferencial clásica Df.

Regresamos a la demostración de la afirmación de que la noción de vector tangente con curvas es compatible y equivalente a la dada por derivaciones.

Proposicion 3.4. *Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. La función $\Psi_p : T_pM \to \mathscr{D}_p$ dada por*

$$\Psi_p([\alpha])(f) = (f \circ \alpha)'(0) \tag{5}$$

es un isomorfismo lineal.

Prueba Notemos que Ψ_p toma una clase de curvas $[\alpha]$ y produce una derivación $\Psi_p([\alpha])$. Dicha derivación actúa sobre las funciones según la fórmula (5).

Hay que verificar un par de cosas antes de poder continuar con la demostración de que es un isomorfismo lineal. En primera: que la función Ψ_p está bien definida. Esto es, no depende del representante de clase tomado.

Sean α y β curvas diferenciables tales que $\alpha \sim_p \beta$ y sea (U, φ_U) cualquier carta alrededor de p. Por hipótesis $\bar{\alpha}'(0) = \bar{\beta}'(0)$ (donde $\bar{\delta}$ denota la representación en coordenadas dada por la carta) y por lo tanto

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)'(0) &= (f \circ \varphi_U^{-1} \circ \varphi_U \circ \alpha)'(0) \\
&= (\bar{f} \circ \bar{\alpha})'(0) \\
&= D\bar{f}_{\bar{\alpha}(0)}(\bar{\alpha}'(0)) \\
&= D\bar{f}_{\bar{\beta}(0)}(\bar{\beta}'(0)) \\
&= (f \circ \beta)'(0)
\end{aligned}$$

Esto prueba que la función Ψ_p está bien definida. En segundo lugar tenemos que demostrar que en efecto $\Psi_p([\alpha])$ es una derivación. Sin embargo esto es fácil de mostrar y se deja al lector a que lo piense.

Notemos que acabamos de demostrar también que se puede calcular $\Psi_p([\alpha])(h)$ en cualquier representación coordenada local como

$$\begin{aligned}
\Psi_p([\alpha])(h) & \left(\bar{h} \circ \bar{\alpha}\right)'(0) \\
&= D\bar{h}_{\bar{p}}(\bar{\alpha}'(0)) \\
&= \nabla\bar{h}(\bar{p}) \cdot \bar{\alpha}'(0) \\
&= \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_i}(\bar{p})\bar{\alpha}'(0)^i
\end{aligned} \tag{6}$$

donde $\bar{p}$ es la representación coordenada de p.

Sean $[\alpha], [\beta] \in T_pM$ y $c \in \mathbb{R}$. Recordemos que podemos representar localmente a $[\alpha] + c[\beta] = [\delta]$ como

$$\bar{\delta} = \bar{\alpha} + c\bar{\beta} - c\bar{p}$$

Luego, por (6), para toda $h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
\Psi_p([\alpha] + c[\beta])(h) &= D\bar{h}_{\bar{p}}\left(\bar{\delta}'(0)\right) \\
&= D\bar{h}_{\bar{p}}\left(\bar{\alpha}'(0) + c\bar{\beta}'(0)\right) \\
&= D\bar{h}_{\bar{p}}\left(\bar{\alpha}'(0)\right) + cD\bar{h}_{\bar{p}}(\bar{\beta}'(0)) \\
&= \Psi_p\left([\alpha]\right)(h) + c\Psi\left([\beta]\right)(h)
\end{aligned}$$

Por lo que $\Psi_p([\alpha] + c[\beta]) = \Psi_p([\alpha]) + c\Psi_p([\beta])$, es decir Ψ_p es lineal.

Ahora queremos demostrar que Ψ_p es inyectiva, lo cual equivale a demostrar que $Nuc(\Psi_p) = \{0\}$. Sea $[\alpha] \neq 0$ un vector tangente. Ver que $\Psi_p([\alpha]) \neq 0$ es exhibir una función $h \in C^\infty(M)$ tal que $\Psi_p([\alpha])(h) = D\bar{h}_{\bar{p}}(\bar{\alpha}'(0)) \neq 0$, en alguna representación coordenada. Esto es encontrar alguna función que no se mantenga constante en la dirección determinada por α. Puesto que $[\alpha] \neq 0$ para cualquier representación coordenada $\bar{\alpha}'(0) \neq 0$. Aunque esto suena relativamente sencillo de demostrar, construir dicha función requiere un poco más de trabajo y lo dejamos para un apéndice (A.2).

Demostraremos ahora la suprayectividad. Sea $D \in \mathscr{D}_p$ cualquier derivación en p. Para demostrar que proviene de una curva usaremos una representación local. Tomemos (U, φ_U) una carta alrededor de p. Luego para toda $h \in C^\infty(M)$ y todo vector tangente $[\alpha] \in T_pM$ sabemos que

$$\Psi_p([\alpha])(h) = \left(\bar{h} \circ \bar{\alpha}\right)'(0)$$

Digamos que existen funciones h_i (véase apéndice (A.2)) en M tales que $\bar{h}_i(y) = y_i$ (la coordenada i-ésima de y) cerca de $\bar{p}$. Entonces en este caso

$$\Psi_p([\alpha])(h_i) = (\bar{h}_i \circ \bar{\alpha})'(0) = \bar{\alpha}_i'(0)$$

es decir al derivar la función h_i con la derivación $\Psi_p([\alpha])$ obtenemos la i-ésima coordenada del vector $\bar{\alpha}'(0)$. Con esta información se puede reconstruir el vector $\bar{\alpha}'(0)$.

Luego, suena razonable pensar que si $v = (D(h_1), \cdots, D(h_n))$ entonces v es el vector tangente de la curva que buscamos, o al menos de su representación coordenada. Es decir, nos gustaría demostrar que si $[\alpha]$ es un vector tangente con $\bar{\alpha}_i'(0) = Dh_i$ entonces $\Psi_p([\alpha]) = D$.

Esto también requiere más de lo esperado. Demostraremos una proposición similar pero algo simplificada puesto que sólo trabajaremos en $\mathbb{R}^n$. Haremos una prueba de que toda derivación de $p \in \mathbb{R}^n$ proviene de una curva. Sea $D \in \mathscr{D}_p$ con $p \in \mathbb{R}^n$.

Como ya mencionamos previamente, se espera que, si $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función que da la coordenada i-ésima entonces $v = (Dx_1, \cdots, Dx_n)$ es el vector para el cual $D = D_v^p$. Es decir que la derivación abstracta no es más que la derivada direccional en la dirección de v.

Sabemos que que derivan del mismo modo las funciones x_i puesto que $D_v^p(x_i) = v_i = Dx_i$. Pero el caso general requiere un lema

Lema 3.5 (Lema de Hadamard). *Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces existen funciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables tales que*

$$h(y) = h(x) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) g_i(y)$$

Prueba Sea $y \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la curva $\alpha(t) = x + t(y - x)$. Noten que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, y que α es diferenciable. La composición $k(t) = h(\alpha(t))$ es diferenciable y por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\int_0^1 k'(t)dt = h(\alpha(1)) - h(\alpha(0)) = h(y) - h(x)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} k'(t) &= Dh_{\alpha(t)}\left(\alpha'(t)\right) \\ &= \nabla h(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \\ &= \nabla h(x + t(y - x)) \cdot (y - x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} h(y)-h(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+t(y-x))(y_i-x_i)dt \\ &= \sum_{i=1}(y_i-x_i)\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+t(y-x))dt \end{aligned}$$

Luego si $g_i(y)=\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+t(y-x))dt$ entonces

$$h(y)=h(x)+\sum_{i=1}^n (y_i-x_i)g_i(y)$$

Por último, notemos que $g_i(x)=\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)dt=\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$. □

Sea $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cualquier función diferenciable. Por el lema de Hadamard existen g_i tales que $h(x)=h(p)+\sum_{i=1}^n (x_i-p_i)g_i(x)$. Luego

$$\begin{aligned} Dh &= Dh(p)+\sum_{i=1}^n D\left((x_i-p_i)g_i(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[D(x_i-p_i)g_i(p)+(p_i-p_i)D(g_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n D(x_i)\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \\ &= D_v^p(h) \end{aligned}$$

y por lo tanto $D=D_v^p$. Esto demuestra, en el caso $M=\mathbb{R}^n$, que Ψ_p es suprayectiva. □

Ejercicio 3.2. *Termina la demostración de que Ψ_p es isomorfismo en el caso general.*

Con esto hemos terminado de demostrar que podemos pensar a cualquier vector tangente de dos modos, como una derivación o como una familia de curvas que apuntan en la misma dirección infinitesimal. El uso de una u otra visión es cuestión de conveniencia.

Definimos dos versiones diferentes de la diferencial de una función $f: M \to N$: una que depende de la noción de curvas y otra de la noción de derivaciones. La siguiente proposición afirma que las dos nociones coinciden cuando se usa el isomorfismo Ψ_p para traducir una versión de vector tangente a la otra.

Proposicion 3.6. *Sea $f: M \to N$ una función diferenciable y $p \in M$. Sean $\Psi_p : T_pM \to \mathscr{D}_p$ y $\Psi_{f(p)} : T_{f(p)}N \to \mathscr{D}_{f(p)}$ los isomorfismos de la proposición (3.4). Para todo $v \in T_pN$ se cumple que*

$$\Psi_{f(p)}(Df_p(v)) = Df_p^*(\Psi_p(v))$$

O bien el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{Df_p} & T_{f(p)}N \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_p} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{f(p)}} \\ \mathscr{D}_p & \xrightarrow{Df_p^*} & \mathscr{D}_{f(p)} \end{array}$$

conmuta.

Prueba Sea $[\alpha] \in T_pM$ un vector tangente. Queremos demostrar que $\Psi_{f(p)}(Df_p([\alpha])) = Df_p^*(\Psi_p([\alpha]))$ como derivaciones (esta igualdad es en el espacio de derivaciones en $f(p)$). Luego hemos de demostrar que para toda $h \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\Psi_{f(p)}\left(Df_p\left([\alpha]\right)\right)(h) = Df_p^*\left(\Psi_p\left([\alpha]\right)\right)(h)$$

Esto no es más que desenvolver las definiciones.

Por una parte

$$\begin{aligned} \Psi_{f(p)}\left(Df_p\left([\alpha]\right)\right)(h) &= \Psi_{f(p)}\left([f \circ \alpha]\right)(h) \\ &= (h \circ f \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Df_p^*\left(\Psi_p\left([\alpha]\right)\right)(h) &= \Psi_p\left([\alpha]\right)(h \circ f) \\ &= \left(h \circ f \circ \alpha\right)'(0) \end{aligned}$$

Los dos términos coinciden. □

De ahora en adelante todo vector $v \in T_pM$ será, al mismo tiempo, una clase de equivalencia de curvas que pasan por p y tienen la misma dirección infinitesimal y una derivación en p. Así si $v = [\alpha]$ y $f \in C^\infty(M)$ entonces

$$v(f) = \left(f \circ \alpha\right)'(0)$$

Estamos escondiendo a Ψ_p para aliviar la notación.

4 Representaciones coordenadas

Ahora que definimos correctamente la noción de un vector tangente en una variedad abstracta daremos una descripción de los vectores tangentes en términos de coordenadas. Así que fijemos una carta (U, φ_U) con la cual poner coordenadas en los puntos de U.

Tomemos $p \in M$ y sea, como es usual, $\bar{p} = \varphi_U(p)$. Cada curva $\alpha : I \to M$ que pasa por p, es decir $\alpha(0) = p$, tiene una representación coordenada $\bar{\alpha} = \varphi_U \circ \alpha$ que pasa por $\bar{p}$ en 0. Esta curva tiene un vector tangente en $\bar{p}$, el cual representa la dirección infinitesimal de $\bar{\alpha}$ en $\bar{p}$. Esta receta define un mapeo

$$\Upsilon_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$$

definido por

$$\Upsilon_p([\alpha]_p) = \bar{\alpha}'(0)$$

que a cada vector tangente le da su representación coordenada.

Definicion 4.1. *La representación coordenada del vector* $[\alpha]_p \in T_pM$ *en la carta* (U, φ_U) *es* $\Upsilon_p([\alpha]) = \bar{\alpha}'(0) = (\varphi_U \circ \alpha)'(0)$.

Proposicion 4.1. *La transformación* Υ_p *es un isomorfismo lineal.*

Prueba Demostraremos primero que Υ_p es lineal.

Sean $[\alpha], [\beta] \in T_pM$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces la representación coordenada de $[\alpha] + c[\beta] = [\gamma]$ es

$$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + c\bar{\beta} - c\bar{p}$$

Por lo que

$$\Upsilon_p([\gamma]) = \bar{\gamma}'(0) = \bar{\alpha}'(0) + c\bar{\beta}'(0) = \Upsilon_p([\alpha]) + c\Upsilon_p([\beta])$$

es decir

$$\Upsilon_p([\alpha] + c[\beta]) = \Upsilon_p([\alpha]) + c\Upsilon_p([\beta])$$

y luego Υ_p es lineal.

Si $[\alpha]$ y $[\beta]$ son tales que $\Upsilon_p([\alpha]) = \Upsilon_p([\beta])$ entonces $\bar{\alpha}'(0) = \bar{\beta}'(0)$, lo cual implica $\alpha \sim_p \beta$ y $[\alpha] = [\beta]$.

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la curva diferenciable $\bar{\alpha}_v(t) = \bar{p} + tv$. Esta curva podría pensarse como la representación coordenada de la curva $\alpha_v = \varphi_U^{-1} \circ \bar{\alpha}(t)$. Dicha curva representa un vector tangente $[\alpha_v] \in T_pM$ para el cual $\Upsilon_p([\alpha_v]) = \bar{\alpha}_v'(0) = v$.

En conclusión Υ_p es un isomorfismo lineal. □

La demostración anterior también nos da el isomorfismo inverso:

$$\Upsilon_p^{-1}(v) = \left[\varphi_U^{-1}(\bar{p} + tv)\right]$$

En particular, para cada punto de U, la representación coordenada induce una base de T_pM, llamada la base canónica inducida por la carta (U, φ_U), dada por $\left\{\Upsilon_p^{-1}(e_i)\right\}$, donde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. A estos vectores se les denota por

$$(\partial x_i)_p = \Upsilon_p^{-1}(e_i) = \left[\varphi_U^{-1}(\bar{p} + te_i)\right]_p$$

Definicion 4.2. *La base canónica de* T_pM *inducida por la carta* (U, φ_U) *es* $\{(\partial x_i)_p\}_{i=1}^n$ *donde*

$$(\partial x_i)_p = \left[\varphi_U^{-1}(\bar{p} + te_i)\right]$$

donde $\bar{p} = \varphi_U(p)$.

Si el punto $p \in M$ es claro del contexto, entonces escribiremos simplemente ∂x_i. Es común encontrarlos en la literatura como $\partial x_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Todo vector $[\alpha] \in T_pM$ puede expresarse en términos de esta base:

$$[\alpha] = a^i \partial x_i$$

Aplicando Υ_p a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\bar{\alpha}'(0) = a^i \Upsilon_p((\partial x_i)_p) = a^i \left(\varphi_U \circ \varphi_U^{-1}(\bar{p} + te_i)\right)'(0) = a^i e_i$$

por lo que $(a^1, \cdots, a^n) = \bar{\alpha}'(0)$. Entonces

$$[\alpha]_p = \bar{\alpha}'(0)^i \partial x_i \tag{7}$$

En términos de derivaciones podemos decir lo siguiente:

Proposicion 4.2. *El vector tangente ∂x_i en p actúa en las funciones $C^\infty(M)$ de la siguiente manera: Para todo $f \in C^\infty(M)$*

$$\partial x_i(f) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{p})$$

donde $\bar{f} = f \circ \varphi_U^{-1}$ es la representación coordenada de f dada por la carta (U, φ_U).

De aquí que al vector ∂x_i también se le llame $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Prueba Recordemos (proposición (3.4)) que para ver a vector tangente descrito como una clase de curvas $v = [\alpha] \in T_pM$ como una derivación se hace lo siguiente, si $f \in C^\infty(M)$

$$v(f) = (\alpha \circ f)'(0)$$

o bien como en la ecuación (6):

$$v(f) = \left(\bar{f} \circ \bar{\alpha}\right)'(0)$$

Sea $f \in C^\infty(M)$. Dado que la representación coordenada de ∂x_i es $\bar{p} + te_i$ tenemos que

$$\partial x_i(f) = \left(\bar{f}(\bar{p} + te_i)\right)'(0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{p})$$

□

Así si v es cualquier vector T_pM entonces podemos escribir

$$v = a^i \partial x_i$$

y luego

$$v(f) = a^i \partial x_i(f) = a^i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{p})$$

Ahora estudiaremos la representación coordenada de la diferencial de una función. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable, $p \in M$, (U, φ_U) una carta alrededor de p y (V, φ_V) una carta alrededor de $f(p)$, donde M es una variedad m-dimensional y N es una variedad n-dimensional. Con estas cartas podemos dar una descripción coordenada de f, dada por $\tilde{f} = \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$. Digamos que $\bar{\delta}$ denota la representación coordenada de δ con la carta (U, φ_U) y $\hat{\gamma}$ denota la representación coordenada de γ con la carta (V, φ_U). Las cartas inducen bases $\beta_1 = \{(\partial x_i)_p\}_{i=1}^m$, $\beta_2 = \left\{(\partial x_i)_{f(p)}\right\}_{i=1}^n$ de los espacios tangentes T_pM y $T_{f(p)}N$, respectivamente. Queremos estudiar el mapeo $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ en términos de estas bases.

Proposicion 4.3 (Representación local de la diferencial)**.** *La matriz asociada a la representación de la transformación $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$, en bases inducidas por las cartas, es*

$$[Df_p]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1}(\bar{p}) & \cdots & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_m}(\bar{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_1}(\bar{p}) & \cdots & \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_n}(\bar{p}) \end{pmatrix}$$

Es decir, si $v \in T_pM$ se puede expresar como $v = a^i\left(\partial x_i\right)_p$ entonces

$$Df_p(v) = a^i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(\partial x_j)_{f(p)}$$

En otras palabras la matriz de la diferencial Df_p es la matriz jacobiana de la representación coordenada $\tilde{f}$ en el sentido clásico.

Prueba Para esto basta con calcular Df_p en los vectores de la base $\beta_1 = \{(\partial x_i)_p\}_{i=1}^m$.

Sea $w_i = Df_p(\partial x_i)$. Recordemos que ∂x_i es la clase de curvas representada por la curva $\varphi_U^{-1}(\bar{p} + te_i)$. Luego w_i es la clase de curvas representada por $\gamma = f \circ \varphi_U(\bar{p} + te_i)$. Puesto que la descomposición de este vector en la base $\beta_2 = \left\{(\partial x_j)_{f(p)}\right\}_{j=1}^n$ está dada por las coordenadas de $\hat{\gamma}'(0)$ (véase (7)), entonces hay que calcular el vector tangente de la representación coordenada de γ:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}'(0) &= \left(\varphi_V \circ \gamma\right)'(0) \\
&= \left(\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}(\bar{p} + te_i)\right)'(0) \\
&= \left(\tilde{f}(\bar{p} + te_i)\right)'(0) \\
&= \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_i}(\bar{p}), \cdots, \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_i}(\bar{p})\right)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$Df_p((\partial x_i)_p) = \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i}(\bar{p})\left(\partial x_j\right)_{f(p)}$$

De aquí se sigue la proposición. □

A Apéndices

A.1 El espacio tangente (curvas) es un espacio vectorial

Proposicion A.1. *Las definiciones de 2.4 están bien definidas y definen una estructura de espacio vectorial en T_pM.*

Prueba La demostración de este hecho no es esencial para lo que sigue, pero sirve para familiarizarse con esta noción de vector tangente.

La definición que hemos dado de suma y producto por escalares depende de dos elecciones arbitrarias: depende de la elección de representante de la clase de equivalencia, y depende de las cartas usadas. Demostraremos que no depende de ninguna de las elecciones.

Sean (U, φ_U) y (V, φ_V) dos cartas alrededor de p. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ curvas diferenciables tales que $\alpha_i(0) = \beta_i(0) = p$ y $\alpha_i \sim_p \beta_i$ con $i = 1, 2$.

Si definimos

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \varphi_U^{-1}\left(\varphi_U \circ \alpha_1 + \varphi_U \circ \alpha_2 - \varphi_U(p)\right) \\
\gamma_2 &= \varphi_V^{-1}\left(\varphi_V \circ \beta_1 + \varphi_V \circ \beta_2 - \varphi_V(p)\right)
\end{aligned}$$

entonces lo que queremos demostrar es que $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$.

Recordemos que demostrar $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ requiere demostrar la igualdad de vectores tangentes en una representación coordenada. Dado que basta con demostrarlo para una carta, podemos elegir la carta que prefiramos. Y en este caso nos conviene usar una de las cartas ya dadas.

Usemos la siguiente notación: La representación de una curva ν con la carta (U, φ_U) es $\bar{\nu} = \varphi_U \circ \nu$, y su representación con la carta (V, φ_V) es $\hat{\nu} = \varphi_V \circ \nu$. Usando (U, φ_U) para representar con coordenadas a γ_1 y γ_2 obtenemos

$$\bar{\gamma}_1 = \varphi_U \left(\varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 - \varphi_U(p)\right)\right) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 - \varphi_U(p)$$
$$\bar{\gamma}_2 = \varphi_U \left(\varphi_V^{-1}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - \varphi_V(p))\right) = \Psi_U^V \left(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - \varphi_V(p)\right)$$

Por la regla de la cadena y la linealidad de la diferencial

$$\bar{\gamma}_2'(0) = D\Psi_U^V \left(\hat{\beta}_1'(0) + \hat{\beta}_2'(0)\right) = D\Psi_U^V \left(\hat{\beta}_1'(0)\right) + D\Psi_U^V(\hat{\beta}_2'(0))$$

Sin embargo por la hipótesis $\alpha_i \sim_p \beta_i$ tenemos que $\hat{\alpha}_i'(0) = \hat{\beta}_i'(0)$, y además dado que $\hat{\beta}_i = \Psi_U^V \circ \alpha_i$, se sigue que

$$D\Psi_U^V(\hat{\beta}_i'(0)) = D\Psi_U^V\left(\hat{\alpha}_i'(0)\right) = \left(\Psi_U^V \circ \alpha_i\right)'(0) = \bar{\alpha}_i'(0)$$

Luego

$$\bar{\gamma}_2'(0) = D\Psi_U^V \left(\hat{\beta}_1'(0)\right) + D\Psi_U^V\left(\beta_2'(0)\right) = \bar{\alpha}_1'(0) + \bar{\alpha}_2'(0) = \bar{\gamma}_1'(0)$$

por lo que $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$.

La demostración de que $c\,[\alpha]$ no depende ni de la carta ni del representante es casi idéntica y se deja para el lector.

Demostrar que T_pM es un espacio vectorial requiere verificar muchas propiedades. Seleccionamos algunas de modo un tanto arbitrario.

1. El espacio tangente tiene un cero $0 \in T_pM$. Definimos el 0 en T_pM como la clase de la curva $0_p : \mathbb{R} \to M$ dada por $0_p(t) = p$. Dicha curva es diferenciable y satisface $0_p(0) = p$, por lo que define un vector tangente $[0_p] = 0$. Sea $\alpha : I \to M$ cualquier otra curva diferenciable con $\alpha(0) = p$. Queremos demostrar que
$$[\alpha] + 0 = [\alpha]$$
Para esto hay que tomar una carta (U, φ_U) y demostrar que
$$[\alpha] + 0 = [\varphi_U^{-1}(\varphi_U \circ \alpha + \varphi_U \circ 0_p - \varphi_U(p))] = [\alpha]$$
es decir si $\beta = \varphi_U^{-1}\left(\varphi_U \circ \alpha + \varphi_U \circ 0_p - \varphi_U(p)\right)$ entonces que
$$\beta \sim_p \alpha$$
De nuevo esto requiere demostrar que los vectores tangentes de alguna representación coordenada son iguales en 0, y para esto tomaremos la misma carta (U, φ_U) para representar a las curvas.
$$\bar{\beta} = \varphi_U \left(\varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{0}_p - \varphi_U(p)\right)\right) = \bar{\alpha} + \varphi_U(0_p) - \varphi_U(p) = \bar{\alpha}$$
puesto que $\varphi_U(0_p(t)) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego $\bar{\beta}'(0) = \bar{\alpha}'(0)$ y $\beta \sim_p \alpha$ y por lo tanto $[\alpha] + 0_p = [\alpha]$.

2. Demostrar que todo vector tiene inverso aditivo:

   Sea $[\alpha] \in T_pM$ un vector. Su representante es una curva diferenciable $\alpha : I \to M$ con $\alpha(0) = p$. Sea $\beta : I' \to M$ la curva definida por $\beta(t) = \alpha(-t)$. Dicha curva satisface $\beta(0) = \alpha(0) = p$ y es diferenciable. Afirmamos que

   $$[\alpha] + [\beta] = 0$$

   De nuevo sea (U, φ_U) cualquier carta alrededor de p, por lo que la suma $[\alpha] + [\beta]$ es la clase de equivalencia representada por la curva

   $$\gamma = \varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right)$$

   Demostrar que $[\alpha] + [\beta] = 0$ es equivalente a demostrar que $\gamma \sim_p 0_p$.

   Con la misma carta (U, φ_U), la representación coordenada de γ bajo φ_U es:

   $$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}$$

   Notemos que $\bar{\beta}(t) = \varphi_U(\beta(t)) = \varphi_U(\alpha(-t)) = \bar{\alpha}(-t)$ y por lo tanto $\bar{\beta}'(0) = -\bar{\alpha}'(0)$, así

   $$\bar{\gamma}'(0) = 0 = \bar{0}_p'(0)$$

   Luego $\gamma \sim_p 0_p$ y $[\alpha] + [\beta] = 0$.

3. Por último demostraremos que la multiplicación por escalares es distributiva. Sean $[\alpha], [\beta] \in T_pM$ y $c \in \mathbb{R}$. Queremos demostrar que

   $$c\left([\alpha] + [\beta]\right) = c\,[\alpha] + c\,[\beta]$$

   Sea (U, φ_U) una carta alrededor de p. Luego las curvas $[\alpha] + [\beta]$, $c\,[\alpha]$ y $c\,[\beta]$ están representadas por

   $$\begin{aligned} [\alpha] + [\beta] &= \left[\varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right)\right] = [\gamma] \\ c\,[\alpha] &= \left[\varphi_U^{-1}\left(c\bar{\alpha} - (c-1)\bar{p}\right)\right] = [\nu_1] \\ c\,[\beta] &= \left[\varphi_U^{-1}\left(c\bar{\beta} - (c-1)\bar{p}\right)\right] = [\nu_2] \end{aligned}$$

   Y por lo tanto las curvas $c\left([\alpha] + [\beta]\right)$ y $c\,[\alpha] + c\,[\beta]$ están representadas por

   $$\begin{aligned} c\left([\alpha] + [\beta]\right) &= c\,[\gamma] = \left[\varphi_U^{-1}\left(c\bar{\gamma} - (c-1)\bar{p}\right)\right] = [\tau_1] \\ c\,[\alpha] + c\,[\beta] &= [\nu_1] + [\nu_2] = \left[\varphi_U^{-1}\left(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2 - \bar{p}\right)\right] = [\tau_2] \end{aligned}$$

   Queremos demostrar que $[\tau_1] = [\tau_2]$, es decir $\tau_1 \sim_p \tau_2$. Para esto tomamos la misma carta (U, φ_U) para representar con coordenadas a las curvas τ_i. Noten que, por la definición de γ,

   $$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 &= c\varphi_U \circ \gamma - (c-1)\bar{p} \\ &= c\varphi_U \circ \varphi_U^{-1}\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{p}\right) - (c-1)\bar{p} \\ &= c\bar{\alpha} + c\bar{\beta} - (2c-1)\bar{p} \end{aligned}$$

y, por las definiciones de ν_i,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_2 &= \varphi_U \circ \nu_1 + \varphi_U \circ \nu_2 - \bar{p} \\ &= \varphi_U \circ \varphi_U^{-1}\left(c\bar{\alpha} - (c-1)\bar{p}\right) + \varphi_U \circ \varphi_U^{-1}\left(c\bar{\beta} - (c-1)\bar{p}\right) - \bar{p} \\ &= c\bar{\alpha} + c\bar{\beta} - 2(c-1)\bar{p} - \bar{p} \\ &= c\bar{\alpha} + c\bar{\beta} - (2c-1)\bar{p}\end{aligned}$$

Luego $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2$, en particular $\bar{\tau}_1'(0) = \bar{\tau}_2'(0)$. Así $\tau_1 \sim_p \tau_2$ y por lo tanto $c([\alpha] + [\beta]) = c\,[\alpha] + c\,[\beta]$.

□

Ejercicio A.1. *Demuestra los axiomas de espacio vectorial que faltan.*

A.2 Las funciones diferenciables de una variedad

En $\mathbb{R}^n$ existen diversas maneras de definir funciones apropiadas para diversas tareas. Sin embargo puede ser que nos encontremos muy limitados al tratar de encontrar funciones diferenciables en una variedad abstracta M.

Un método para definir funciones en M podría ser como sigue: Tomen una carta (U, φ_U) y usen las coordenadas para definir funciones en U. O dicho de otro modo si $f : \varphi_U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cualquier función diferenciable entonces $\hat{f} = \varphi_U \circ f$ es una función diferenciable en U. Sin embargo esta receta sólo produce una función en U que posiblemente sea difícil (si no es que imposible) extender diferenciablemente a una función en todo M.

Este problema es resuelto, parcialmente, por las funciones chipote.

Definicion A.1. *Sean $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos. Una función chipote para el par (U, V) es una función diferenciable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *$h(x) = 1$ para todo $x \in U$.*
2. *$h(x) = 0$ para todo $x \notin V$.*
3. *$h(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Un resultado importante de la topología diferencial es el hecho de que siempre existen funciones chipote para cualquier par de abiertos $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ con $\overline{U} \subset V$. La demostración de este hecho está en las notas de particiones de la unidad. Así que, de ahora en adelante, simplemente vamos a aceptar la existencia de dichas funciones.

Estas funciones chipote nos ayudarán a extender funciones definidas localmente (en coordenadas) a toda la variedad.

Supongamos que estamos en una carta (U, φ_U) y hemos elegido una función particular $f : \varphi_U(U) \to \mathbb{R}$ por que su comportamiento nos es favorable cerca del punto $x \in U$. Puesto que U es un abierto existen $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ tales que $B_{\varepsilon_3}(x) \subset U$ y para los cuales podemos encontrar una función chipote h para el par $(B_{\varepsilon_1}(x), B_{\varepsilon}(x))$. Notemos que la función h es cero en una vecindad abierta de la frontera $\partial\varphi_U(U)$ (a saber $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\varepsilon_2}(x)}$) y $h = 1$ en una vecindad de x. Luego la función $\tilde{f} = fh$ es una función definida en $\varphi_U(U)$ tal que $\tilde{f} = f$ en una vecindad abierta de x y $\tilde{f} = 0$ en una vecindad abierta de $\partial\varphi_U(U)$. Luego si definimos $k : M \to \mathbb{R}$

$$k(p) = \begin{cases} \tilde{f}(\varphi_U(p)) & p \in U \\ 0 & p \notin U \end{cases}$$

entonces resulta que k es una función diferenciable de M cuya representación coordenada en la carta (U, φ_U) satisface $\bar{k} = f$ en una vecindad de x.

Ejercicio A.2. *Demuestra la afirmación anterior.*

De este modo uno puede crear variedad de funciones con el comportamiento local que uno desee.