Ejercicios-Proyecto primer parcial

Subvariedades y funciones diferenciables

*

Recuerden que definimos una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera

Definicion 0.1. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad (de tipo C^r) de dimensión m si para todo $p \in A$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a p, junto con una carta (cambio de coordenadas) $\varphi : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ (de tipo C^r) tal que*

$$\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^m \times 0 \tag{1}$$

esto es, salvo cambio de coordenadas, el pedazo de A en U es como un pedazo de subplano de dimensión m en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 0.1. *Demuestra que si A es una subvariedad encajada, entonces A es una variedad como lo definimos en las notas de variedades. Hay de dar cartas y demostrar que los cambios de coordenada son diferenciables.*

Ejercicio 0.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad encajada de dimensión m. Sea $\alpha : U \subset \mathbb{R}^k \to A$ una trayectoria continua, con U abierto de $\mathbb{R}^k$. Demuestra que α es diferenciable en el sentido de variedades (usando la estructura diferenciable definida en el ejercicio anterior) si y solo si es diferenciable como función $\alpha : U \subset \mathbb{R}^k \to A \subset \mathbb{R}^n$.*

Ejercicio 0.3. *Demuestra que el toro*

$$T = \{(2\cos(\theta) + \cos(\varphi)\cos(\theta), 2\sin(\theta) + \cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)) \mid \theta, \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^3$.