Proyecto // Parcial II

Introducción a la teoría de Morse
y el teorema de clasificación de superficies

22 de octubre de 2017

Resumen

El objetivo de este proyecto es brindar una introducción guiada a la teoría de Morse. La teoría de Morse estudia el comportamiento *genérico* de funciones diferenciables cerca de sus puntos singulares. En gran medida, el éxito de la teoría de Morse radica en que las *funciones de Morse* son suficientemente abundantes como para que sean útiles, y a la vez tienen un comportamiento suficientemente sencillo como para que sea posible estudiarlas a detalle.

Una de las aplicaciones más clásicas e importantes de la teoría de Morse es a la topología de variedades: se puede demostrar que toda variedad compacta admite funciones de Morse, y dichas funciones proveen de una descomposición de la variedad en «pedazos» relativamente sencillos.

Los objetivos particulares de este proyecto son demostrar el lema de Morse en dimensión 2 y utilizar algunos otros resultados para dar una demostración del teorema de clasificación de superficies. Esta presentación está inspirada en el libro [1].

1. Introducción a la teoría de Morse

1.1. Funciones de Morse en $\mathbb{R}^n$

Comenzaremos el estudio de las funciones de Morse en el caso más sencillo, es decir en el caso de funciones en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico de f es decir, la transformación lineal $Df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ es identicamente cero.

Definición 1.1. *Decimos que p es un* punto crítico no degenerado *de la función f si la matríz* hessiana *de f en p es no degenerada, es decir, si la matríz*

$$\operatorname{Hess}_p(f) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

es invertible.

Ejercicio 1.1. *Demuestra que la matríz hessiana es una matríz simétrica.*

Por el momento, nos interesará concentrarnos en un único punto del dominio de f. Componiendo con una traslación, podemos asumir que dicho punto es el origen.

Ejercicio 1.2. *Sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathcal{U}$.*

Demuestra que

$$\mathrm{Hess}_p(f \circ \varphi) = (J_p(\varphi))^t \,\mathrm{Hess}_{\varphi(p)}(f) J_p(\varphi)$$

donde $J_p(\varphi)$ es la matríz jacobiana de φ en p.

1.1.1. Formas bilineales simétricas y la ley de inercia de Sylvester

Recordemos algunos hechos fundamentales de álgebra lineal realtivos a formas bilineales y matrices simétricas.

Definición 1.1. *Una forma bilineal B sobre un espacio vectorial V es una función*

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

que es lineal en cada entrada. Si la función B satisface $B(v, w) = B(w, v)$, diremos que es simétrica. Si además satisface que $B(v, \cdot) = 0$ como elemento de V^* implica que $v = 0$, diremos que es no degenerada.

Sea $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base del espacio vectorial V. Con la base β podemos obtener una representación matricial de la forma bilineal B de la siguiente forma: Sea

$$[B]_\beta := \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

donde $B_{ij} := B(e_i, e_j)$.

Ejercicio 1.3. *Demuestra que la forma bilineal es simétrica si y solo si su representación matricial en cualquier base es una matríz simétrica.*

Ejercicio 1.4. *Demuestra que la forma bilineal es no degenerada si y solo si su representación matricial es una matríz invertible.*

Ejercicio 1.5. *(Ley de inercia de Sylvester) Sea B una forma bilineal y simétrica sobre V. Demuestra que existe una base β tal que*

$$[B]_\beta = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_k \end{array}\right]$$

donde I_n es la matríz identidad de tamaño n y 0_k es la matriz cuadrada de tamaño k cuyas entradas son todas cero. Demuestra además que dicha representación es única, es decir, los enteros n, m y k dependen sólo de la forma bilineal y no de la base β. (Sugerencia: Proceso de Gram-Schmidt)

A los tres enteros que aparecen en el ejercicio anterior se les llama la *signatura* de la forma bilineal y corresponden a las dimensiones máximas de los subespacios de V en los que B es positiva definia, negativa definida y degenerada, correspondientemente.

Ejercicio 1.6. *Usando el ejercicio anterior, demuestra que bajo un cambio de coordenadas lineal, la matríz hessiana de f en el cero se puede llevar a una matríz que digonal que tiene unicamente 1, -1 y 0 en la diagonal. Es decir, existe T automorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$ tal que $f \circ T$ tiene matríz hessiana*

$$Hess_p(f) = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_k \end{array}\right]$$

Como corolario del ejercicio anterior, deducimos que bajo un cambio de coordenadas lineal, la matríz hessiana de una función en un punto crítico no degenerado es la matríz:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_m \end{array}\right]$$

Ejercicio 1.7. *Demuestra que si p es un punto crítico no degenerado de la función f, entonces existe una vecindad de p en la que p es el único punto crítico. Sugerencia, considera la función*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \end{aligned}$$

y usa el teorema de la función inversa.

Definición 1.2. *Decimos que una función diferenciable f es* de Morse *si todos sus puntos críticos son no degenerados.*

Ejercicio 1.8. *Determina cuáles de las siguientes funciones son de Morse:*

1. $f(x_1, \ldots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_n^2$
2. $f(x_1, \ldots, x_n) = \pm x_1^3 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2$
3. $f(x) = x^2 + x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 3x^3 - 3x^4 + x^5$
5. $f(x, y) = x + y^3$
6. $f(x) = sen(x)$
7. $f(x) = sen(x)^2$

Ejercicio 1.9. *Las siguientes funciones son de Morse y tienen un punto crítico no degenerado en el origen. Para cada una de ellas encuentra un cambio de coordenadas lineal T tal que la matríz hessiana de la función $f \circ T$ en el origen tenga la forma del ejercicio 1.6:*

1. $f(x) = 3x^2$
2. $f(x, y) = 3x^2 - 5y^2$
3. $f(x_1, \ldots, x_n) = \pm a_1 x_1^2 \pm \ldots \pm a_n x_n^2$ *con* $a_i > 0$.

El ejercicio anterior nos indica que la signatura de la matríz hessiana de una función en un punto crítico es invariante bajo cambios de coordenadas, lo que nos lleva a pensar que posiblemente exista una definición invariante del hessiano de la función, es decir, que no dependa del uso de coordenadas. Esto sería útil pues nos permitiría definir la noción de hessiano de una función definida en una variedad diferenciable.

Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y tal que p es un punto crítico de f. Daremos una definición de $\mathrm{Hess}_p(f)$ como una forma bilineal en T_pM:

Sean $v, w \in T_pM$ dos vectores tangentes arbitrarios.

Ejercicio 1.10. *Demuestra que existe un abierto $\mathcal{U}$ que es vecindad de p y campos vectoriales $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ definidos sobre $\mathcal{U}$ y tal que $\tilde{v}|_p = v$ y $\tilde{w}|_p = w$. (Sugerencia: usa una carta coordeanda y los campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$)*

Usando los campos del ejercicio anterior podemos definir la función $\tilde{v}(f)$ como el resultado de aplicar la derivación $\tilde{v}|_q$ a la función f.

Definimos $\mathrm{Hess}_p f(v, w) := w(\tilde{v}(f))$, es decir, la derivada direccional de la función $\tilde{v}(f)$ en la dirección w. A priori, no es claro que dicha definición no dependa de la extensión $\tilde{v}$ del vector v.

Ejercicio 1.11. *Demuestra que si $\tilde{v}_1$ y $\tilde{v}_2$ son dos extensiones del vector v (es decir, son campos vectoriales definidos en una vecindad de p y tal que $\tilde{v}_1|p = v$ y $\tilde{v}_2|p = v$) entonces $w(\tilde{v}_1(f)) = w(\tilde{v}_2(f))$. Concluye que $\mathrm{Hess}_p(f)(v, w)$ solo depende de los vectores v y w. (Sugerencia: demuestra que $w(\tilde{v}(f)) - v(\tilde{w}(f)) = [v, w](f)$ y usa esto para demostrar que el hessiano es simétrico)*

Ejercicio 1.12. *Demuestra que $\mathrm{Hess}_p(f) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal en T_pM.*

Sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ una carta de M con $p \in \mathcal{U}$. Sea $\beta := \{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ la base del espacio tangente a M en p dada por los vectores canónicos asociados a la carta φ, y sea $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ la representación coordenada de la función f en la carta φ.

Ejercicio 1.13. *Demuestra que $\mathrm{Hess}_{\varphi(p)}(\tilde{f}) = [\mathrm{Hess}_p(f)]_\beta$. Es decir, que la representación matricial de la forma bilineal $\mathrm{Hess}_p(f)$ en la base β es la matríz hessiana usual de la función $\tilde{f}$.*

Última actualización: 22 de octubre de 2017

Referencias

[1] S. K. Donaldson. *Riemann surfaces.* Oxford New York: Oxford University Press, 2011. ISBN: 978-0199606740.

[2] David Gauld. *Differential topology : an introduction.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2006. ISBN: 978-0486450216.

[3] Morris Hirsch. *Differential topology.* New York: Springer-Verlag, 1976. ISBN: 978-0387901480.

[4] John Milnor. *Morse theory.* Princeton, N.J: Princeton University Press, 1963. ISBN: 978-0691080086.

[5] Anant Shastri. *Elements of differential topology.* Boca Raton, FL: CRC Press, 2011. ISBN: 978-1439831601.