Proyecto // Parcial II

Grupos de Lie

*

Este proyecto está diseñado como una introducción a la geometría diferencial de los grupos de Lie.

1 Definición y propiedades básicas

Definición 1.1. *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G junto con un par de funciones diferenciables $m : G \times G \to G$, $i : G \to G$ y un elemento distinguido $e \in G$ tal que*

1. $m(a, e) = m(e, a) = a$ *para todo* $a \in G$.
2. $m(c, m(a, b)) = m(m(c, a), b)$ *para todo* $a, b, c \in G$.
3. $m(a, i(a)) = m(i(a), a) = e$ *para todo* $a \in G$.

Esto es, todo grupo de Lie es un grupo, que además es una variedad y las operaciones de grupo son diferenciables. De ahora en adelante usaremos la notación $ab = m(a, b)$ y $i(a) = a^{-1}$.

Si $a \in G$, entonces la multiplicación derecha e izquierda por a define dos funciones $L_a, R_a : G \to G$ dada por

$$L_a(b) = ab$$
$$R_a(b) = ba$$

Ejercicio 1.1. *Para cada* $a \in G$ *demuestra que:*

1. L_a *y* R_a *son diferenciables.*
2. $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ *y* $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$. *Concluye que* L_a *y* R_a *son difeomorfismos.*
3. *Si* $b \in G$ *entonces* $L_a \circ L_b = L_{ab}$ *y* $R_a \circ R_b = R_{ba}$.
4. $i \circ L_a = R_{a^{-1}} \circ i$ *y* $i \circ R_a = L_{a^{-1} \circ i}$.

La función de multiplicación $m : G \times G \to G$ es diferenciable por lo que tiene diferencial en cada punto $(g, h) \in G \times G$. Recuerden que $T_{(g,h)}(G \times G) \cong T_gG \times T_hG$. Esta descomposición del espacio tangente nos permite describir la diferencial de m en términos de los difeomorfismos L_a y R_b.

Ejercicio 1.2. *Demuestra que se puede calcular la diferencial de m en el punto $(a,b) \in G \times G$ como*

$$Dm_{(a,b)}(v,w) = (DL_a)_b(w) + (DR_b)_a(v)$$

Sugerencia: Usa que $Dm_{(a,b)}$ es lineal y calcula $Dm_{(a,b)}$ en vectores de la forma $(v,0)$ y $(0,w)$.

Ejercicio 1.3. *Demuestra que la diferencial del mapeo de inversión $i : G \to G$ en la identidad está dado por*

$$Di_e(v) = -v$$

Notemos que para cada $a \in G$ se tiene que $L_a(e) = ae = a$ y por lo tanto la diferencial $(DL_a)_e : T_eG \to T_aG$ conecta dichos espacios tangentes.

Ejercicio 1.4. *Demuestra que, para cada $a \in G$ la diferencial $(DL_a)_e$ es un isomorfismo lineal.*

Estos isomorfismos se pueden juntar en una función

$$\Psi : G \times T_eG \to TM$$

definida por

$$\Psi(a,v) = (a, (DL_a)_e(v)) \in TM$$

Ejercicio 1.5. *Este ejercicio tiene como objetivo demostrar que Ψ es un isomorfismo de haces vectoriales.*

1. *Demuestra que Ψ es una función diferenciable.*
2. *Define $\Gamma : TM \to G \times T_e$ como*

$$\Gamma(a,v) = (a, DL_{a^{-1}}(v))$$

   Demuestra que Γ es diferenciable y que $\Psi^{-1} = \Gamma$.

3. *Demuestra que Ψ es un mapeo de haces vectoriales y concluye que Ψ es un isomorfismo de haces vectoriales.*
4. *Concluye que G es paralelizable.*

Para una introducción accesible a la teoría de grupos de Lie, véase [7]. También es recomendable consultar la parte de Graeme Segal del libro [4].

2 Campos invariantes

Las multiplicaciones por la izquierda y derecha también transportan o trasladan los campos vectoriales. Los campos invariantes son aquellos que coinciden con todos sus traslados:

Definición 2.1. *Se dice que un campo vectorial X en G es izquierdo [derecho] invariante si para todo $a \in G$*

$$L_a^*(X) = X \qquad [R_a^*(X) = X]$$

es decir si para todo $b \in G$

$$(DL_a)_b(X_b) = X_{ab} \qquad [(DR_a)_b(X_b) = X_{ba}]$$

La colección de campos izquierdo invariantes es denotada por $\mathcal{X}^G(G)$.

Nota que si $X, Y \in \mathcal{X}^G(G)$ son un par de campos invariantes y $c \in \mathbb{R}$ entonces $X + cY$ es un campo izquierdo invariante. Esto es los campos izquierdo-invariantes forman un subespacio vectorial del conjunto de campos vectoriales.

Ejercicio 2.1. *Demuestra que si $X \in \mathcal{X}^G(X)$ es un campo izquierdo invariante y $Y = i^*(X)$, i.e. $Y_a = (Di)_{a^{-1}}(X_{a^{-1}})$, entonces Y es izquierdo invariante.*

Ejercicio 2.2. *Para cada vector $v \in T_eG$ define el campo vectorial X_v como $(X_v)_a = (DL_a)_e(v)$. Demuestra que X_v es un campo vectorial diferenciable e izquierdo-invariante.*

Prueba también que el mapeo $v \mapsto X_v$ es un isomorfismo lineal entre T_eG y $\mathcal{X}^G(G)$. Por lo que $\mathcal{X}^G(G)$ es un espacio vectorial con $dim(\mathcal{X}^G(G)) = dim(G)$.

Ejercicio 2.3. *Demuestra que si $X, Y \in \mathcal{X}^G(G)$ entonces $[X, Y] \in \mathcal{X}^G(G)$.*

Por todo lo probado hasta ahora $T_eG \cong \mathcal{X}^G(G)$ es un espacio vectorial finito dimensional junto con una operación $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}^G(G) \times \mathcal{X}^G(G) \to \mathcal{X}^G(G)$ bilineal y antisimétrica. Esta operación satisface la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

A un espacio vectorial junto con una operación así se le llama un álgebra de Lie.

Definición 2.2. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V junto con una operación $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$ que satisface*

1. *$[\cdot, \cdot]$ es bilineal.*
2. *Para todos $v, w \in V$, $[v, w] = -[w, v]$.*
3. *Para todos $v, w, z \in V$, $[v, [w, z]] + [z, [v, w]] + [w, [z, v]] = 0$.*

Definición 2.3. *A T_eG se le llama el álgebra de Lie asociada a G y es usualmente escrita con letras góticas $\mathfrak{g} = T_eG$.*

3 Subgrupos a un parámetro

Definición 3.1. *Una curva diferenciable $a : \mathbb{R} \to G$ es un subgrupo a un parámetro si*

$$a(0) = e$$
$$a(t + s) = a(t)a(s)$$

Cada subgrupo a un parámetro produce transformaciones a un parámetro de G de la siguiente manera: Sea $\Psi_a : G \times \mathbb{R} \to G$ la función definida por

$$\Psi_a(b,t) = ba(t) = R_{a(t)}(b)$$

Ejercicio 3.1. *Demuestra que Ψ_a es diferenciable. Y que para todo $b \in G$ y $t, s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Psi_a(b, t+s) = \Psi_a(\Psi_a(b,t), s)$.*

Para cada b fijo esto define una curva diferenciable $\beta_a^b(t) = \Psi_a(b,t)$ que satisface $\beta_a^b(0) = \Psi_a(b,0) = a(0)b = eb = b$. Luego $(\beta_a^b)'(0) \in T_bM$. Si definimos $X_a(b) := (\beta_a^b)'(0)$, la función X_a define un campo vectorial. Notemos que se cumple que:

$$X_a(b) = \frac{\partial \Psi_a}{\partial t}(b,0)$$

Ejercicio 3.2. *Demuestra que X_a es un campo vectorial izquierdo invariante y $(X_a)_e = a'(0)$.*

Noten que para obtener un campo izquierdo invariante hay que multiplicar por la derecha por el subgrupo a un parámetro.

Hemos visto cada subgrupo a un parámetro define un campo vectorial izquierdo invariante. Ahora veremos que el reciproco también es cierto.

Para los siguientes ejercicios, necesitamos usar la noción de *flujo* y la relación entre flujos maximales y campos vectoriales. Para más detalles sobre estas nociones, véase [5, p. 135] [6, p.89] y [3, p. 74].

Ejercicio 3.3. *Sea $Sub_1(G)$ el conjunto de subgrupos a un parámetro de G. Acabamos de definir una función $\Theta : Sub_1(G) \to \mathcal{X}^G(G)$ dado por*

$$\Theta(a) = \frac{\partial \Psi_a}{\partial t}$$

Cada campo izquierdo invariante $X \in \mathcal{X}^G(G)$ es una ecuación diferencial en G la cual induce un flujo maximal $\Psi_X : G \times \mathbb{R} \to G$ (asumiremos por el momento que está definido en todo $G \times \mathbb{R}$)

1. *Demuestra que la curva $a(t) = \Psi_X(e,t)$ es un subgrupo a un parámetro de G.*
2. *Demuestra que $\Theta(a) = X$. Sugerencia: Demuestra que $\Psi_a = \Psi_X$.*
3. *Concluye que Θ es biyectiva.*

Dado que $T_eG \cong \mathcal{X}^G(G) \cong Sub_1(G)$ todo vector tangente en la identidad tiene asociado un subgrupo a un parámetro.

Ejercicio 3.4. *Demuestra que para todo $v \in T_eG$ existe un único subgrupo a un parámetro de G, digamos $a_v : \mathbb{R} \to G$, tal que $a_v'(0) = v$.*

Dichos mapeos se juntan en un único mapeo llamado el mapeo exponencial del grupo G.

Definición 3.2. *El mapeo exponencial $exp : T_eG \to G$ es la función definida por*

$$exp(v) = a_v(1)$$

Ejercicio 3.5. *Demuestra que, para todo $v \in T_eG$ se tiene*

$$a_v(t) = exp(tv)$$

Una exposición relativamente elemental de los subgrupos a un parámetro del grupo $GL_n(\mathbb{R})$ y su relación con los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales se puede encontrar en el capítulo 3 de [2].

4 Métricas invariantes

La noción de campo vectorial invariante se puede extender a campos tensoriales. Eso ya que los difeomorfismos L_a (y R_a) también trasladan campos tensoriales. Recordamos que si $g : M \to N$ es un difeomorfismo y $T \in T^r_s M$ es un campo tensorial entonces g_*T es el campo tensorial en N tal que para todo $g(q) \in N$ y todos $v_1, \cdots, v_r \in T_{g(q)}N$ y $f^1, \cdots, f^s \in T^*_{g(q)}N$ se tiene que

$$\begin{aligned}(g_*(T))_{g(q)}&(v_1, \cdots, v_r, f^1, \cdots, f^s)\\ &= T(Dg_q^{-1}(v_1), \cdots, Dg_q^{-1}(v_r), f^1 \circ Dg_q, \cdots, f^s \circ Dg_q)\end{aligned}$$

Definición 4.1. *Un campo tensorial $T \in T^r_s G$ es izquierdo [derecho] invariante si para todo $a \in G$ se tiene que $(L_a)_*(T) = T$ [$(R_a)_*(T) = T$]. El espacio de (r, s)-tensores izquierdo-invariantes es denotado por $(T^r_s)^G G$. El espacio de r-formas diferenciales izquierdo-invariantes es denotado por $\Omega^r_G G$.*

En particular una 1-forma ω es izquierdo invariante si para todo $a \in G$ y todo campo vectorial $X \in \mathcal{X}(G)$

$$(L_a)_*(\omega)(X) = \omega\left(DL_a^{-1}(X)\right) = \omega\left(DL_{a^{-1}}(X)\right)$$

Ejercicio 4.1. *Sean $\omega \in \Omega^1 G$ y $X \in \mathcal{X}(G)$.*

1. *Demuestra que ω es izquierdo-invariante si y sólo si $\omega(Y)$ es una función constante para todo $Y \in \mathcal{X}^G G$.*

2. *Demuestra que X es izquierdo-invariante si y sólo si $\tau(X)$ es una función constante para todo $\tau \in \Omega^1_G G$.*

Definición 4.2. *Una métrica izquierdo(derecho)-invariante en G es una métrica $g \in T^2_0(G)$ (simétrica, positivo definida) que es izquierdo(derecho)-invariante.*

Ejercicio 4.2. *Demuestra que siempre existe una métrica izquierdo-invariante.*

Ejercicio 4.3. *Sea g una métrica riemanniana en G y $X \in \mathcal{X}(G)$.*

1. *Demuestra que g es izquierdo invariante si y sólo si para todo par $Y, Z \in \mathcal{X}^G(G)$ la función $g(Y, Z)$ es constante.*

2. *Supón que g es izquierdo invariante. Demuestra que X es izquierdo invariante si y sólo si para todo $Y \in \mathcal{X}^G(G)$ la función $g(X, Y)$ es constante.*

Ejercicio 4.4. *Demuestra que si g es una métrica izquierdo(derecho)-invariante entonces para todo $a \in G$ los difeomorfismos $L_a(R_a)$ son isometrías.*

Ejercicio 4.5. *Demuestra que si X es derecho invariante entonces $\mathcal{L}_X g = 0$. Sugerencia: Recuerda que el flujo de X está dado por $\Psi_a(b,t) = a(t)b$, donde $a : \mathbb{R} \to G$ es una solución a $x' = X(x)$ con $a(0) = e$ y luego evalúa $\mathcal{L}_X g$ con campos izquierdo-invariantes.*

Ejercicio 4.6. *Supongamos que g es una métrica izquierdo y derecho invariante (o bi-invariante). Usa la fórmula de Koszul:*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) =& \frac{1}{2}(Xg(Y,X) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)) \end{aligned}$$

y la ecuación

$$\mathcal{L}_X g(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])$$

para demostrar que si X es un campo izquierdo invariante entonces

$$\nabla_X X = 0$$

Concluye que las curvas $\gamma_v(t) = exp(tv)$, para $v \in T_e G$ unitario, son geodésicas. Sugerencia: Calcula $g(\nabla_X X, Z)$ para cualquier campo $Z \in \mathcal{X}^G(G)$.

Para más información sobre métricas invariantes en grupos de Lie véase el apéndice 2 de [1].

References

[1] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics.* New York: Springer-Verlag, 1989. ISBN: 978-0387968902.

[2] V. I. Arnol'd. *Ordinary differential equations.* Berlin, Germany New York: Springer, 2006. ISBN: 978-3540345633.

[3] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Introduction to differential topology.* Cambridge New York: Cambridge University Press, 1982. ISBN: 978-0521284707.

[4] Roger Carter, Graeme Segal, and Ian G. Macdonald. *Lectures on Lie groups and Lie algebras.* Cambridge New York: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 978-0521499224.

[5] Michael Spivak. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Vol. 1. Westview Press, 1971.

[6] Shlomo Sternberg. *Lectures on differential geometry.* American Mathematical Soc., 1999.

[7] John Stillwell. *Naive lie theory.* New York London: Springer, 2010. ISBN: 978-1441926814.